BCPST

1.1 & 1.2

# Devoir Surveillé n°7

**Samedi Jeudi 10 avril 2025**

# – Probabilités et Variables aléatoires –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

**Les conclusions des questions devront être soulignées ou encadrées.**

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

**Le sujet comporte 2 pages.**

## Questions de cours.

Soit $n$ un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Donner, sans justification, l'espérance de X.
2. Déterminer la variance de X.
   *On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

## Exercice 1.

Une urne contient une boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes.
On effectue des pioches successives d'une boule sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 couleurs dans l'urne.
Pour un entier non nul $i$, on pourra noter $\mathrm{R}_i$ (resp. $\mathrm{N}_i$ ou $\mathrm{J}_i$) l'événement "la boule piochée au $i-$ème tirage est rouge (resp. noire ou jaune).
On note X le nombre de tirages nécessaires pour que le jeu s'arrête (il ne reste que 2 couleurs dans l'urne).

1. Déterminer $\mathrm{X}(\Omega)$ puis la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. On pose $\mathrm{Y} = 30\mathrm{X} - 13$. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
4. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

## Problème.

On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire.
On répète l'expérience suivante

- on tire au hasard une boule dans l'urne
- avant le tirage suivant, la boule tirée est remise dans l'urne ainsi qu'une autre boule de la même couleur.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc 3 boules et l'on note $\mathrm{X}_1$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $\mathrm{X}_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la $n-$ème expérience et $\mathrm{B}_n$ l'événement "la boule piochée au $n-$ème tirage est blanche".

1. (a) Déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)$.
   (b) Déterminer la loi de $\mathrm{X}_1$.
   (c) Déterminer la loi de $\mathrm{X}_2$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n+2]\!]$. Montrer que
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \frac{2+n-k}{2+n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) + \frac{k-1}{2+n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1)$$
   (b) Prouver que $\mathrm{X}_n$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
   *On pourra faire une récurrence.*
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Sachant $\mathrm{X}_n = k$, quelle est la composition de l'urne à l'issue de la $n-$ème expérience?
   (b) Déterminer la probabilité de $\mathrm{B}_{n+1}$.
   *On pourra utiliser la formule des probabilités totales.*