Exercice 1 Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = 0\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = 1\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy = 0\}$
4. $F = \{(x, 2x, -x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $F = \{(x, y, y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $F = \{(x, y, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2

1. Ecrivez les ensembles suivants comme des sous−espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs à déterminer. (on parlera de famille génératrice)
   (a) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
   (b) Dans $E = \mathbb{R}^n$: $G = \{(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$
   (c) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y - z = 0\}$
2. Déterminer $H \cap R$. Est-ce un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$, on note $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$

1. Exprimer $\text{Vect}(e_1, e_2)$.
2. Soit $u = (-2, x, y, 3)$.
   A quelle condition sur (x, y) est-ce que u est une combinaison linéaire de e_1 et de e_2 ?

Exercice 4 Reprendre les quatre ensembles de l'exercice 2 et en donner une base.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comparer (en terme d'inclusion) les ensembles suivants : $\text{Vect}(u, v)$, $\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(u, \lambda.u)$.

Exercice 6 Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 2, 2)$.
2. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
3. $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (2, -1, 3)$ et $e_3 = (-1, 1, -1)$.
4. $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -2)$.

Exercice 7 Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$
2. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 2)$.
3. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
4. $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 0),\ e_3 = (0, 1, 1)$.

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $u = (8, 4, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9

1. Montrer que la famille $(e_1 = (2, 1, 1), e_2 = (1, 4, 3), e_3 = (0, 1, 1), e_4 = (1, 2, 3))$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base extraite de cette famille.