

Exercice 1 Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$
4. $F = \{(x, 2x, -x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $F = \{(x, y, y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $F = \{(x, y, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Correction Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on peut l'écrire comme un ensemble de combinaisons linéaires ou utiliser la définition.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\} = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1))$
donc c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
2. $(1, 0) \in F, (0, 1) \in F$ et pourtant $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
3. $(1, 0) \in F, (0, 1) \in F$ et pourtant $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
4. On va vérifier les deux points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (thm 16).
 - (a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 2 \cdot 0, -0)$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ donc F est non vide.
 - (b) Soit $(u, v) \in F^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (x, 2x, -x)$ et $v = (y, 2y, -y)$.
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda(x, 2x, -x) + \mu(y, 2y, -y) = (\lambda \cdot x + \mu \cdot y, 2(\lambda \cdot x + \mu \cdot y), -(\lambda \cdot x + \mu \cdot y))$. Donc,
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

F est non vide et stable par combinaison linéaire donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
5. On va vérifier les deux points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (thm 16).
 - (a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0 - 0)$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ donc F est non vide.
 - (b) Soit $(u, v) \in F^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 $\exists (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = (x_1, y_1, y_1 - x_1)$ et $v = (x_2, y_2, y_2 - x_2)$.
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda(x_1, y_1, y_1 - x_1) + \mu(x_2, y_2, y_2 - x_2)$
 $= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2, (\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) - (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2))$.
 Donc, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

F est non vide et stable par combinaison linéaire donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
6. $(0, 0, 3) \in F$ et $(1, 1, 3) \in F$. Pourtant, $(0, 0, 3) + (1, 1, 3) = (1, 1, 6) \notin F$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2

1. Ecrivez les ensembles suivants comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs à déterminer. (on parlera de famille génératrice)
 - (a) Dans $E = \mathbb{R}^3 : H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
 - (b) Dans $E = \mathbb{R}^n : G = \{(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$
 - (c) Dans $E = \mathbb{R}^3 : R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$
2. Déterminer $H \cap R$. Est-ce un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?

Correction

1. (a) $H = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1 - 3))$
- (b) $G = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$
- (c) $R = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$
2. • Soit $v \in H \cap R$.
 Comme $v \in H$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $v = (a - b, a + b, a - 3b)$.
 Comme $v \in R, a - b + a + b - a + 3b = 0$ i.e. $a + 3b = 0$. D'où $v = (-4b, -2b, -6b)$.
 Donc $v \in \text{Vect}((2, 1, 3))$.
 Donc $H \cap R \subset \text{Vect}((2, 1, 3))$.

- En prenant $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, on remarque que $(2, 1, 3) \in H$.
De plus, $2 + 1 - 3 = 0$ donc $(2, 1, 3) \in R$.
Donc $\text{Vect}((2, 1, 3)) \subset H \cap R$.

D'où $H \cap R = \text{Vect}((2, 1, 3))$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On peut aussi l'affirmer en disant que $H \cap R$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 Dans \mathbb{R}^4 , on note $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$

1. Exprimer $\text{Vect}(e_1, e_2)$.
2. Soit $u = (-2, x, y, 3)$.
A quelle condition sur (x, y) est-ce que u est une combinaison linéaire de e_1 et de e_2 ?

Correction

Exercice 4 Reprendre les quatre ensembles de l'exercice 2 et en donner une base.

Correction

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comparer (en terme d'inclusion) les ensembles suivants : $\text{Vect}(u, v)$, $\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(u, \lambda.u)$.

Correction

- $\text{Vect}(u) = \{\lambda_1.u, \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1.u + 0.v, \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \subset \{\lambda_1.u + \lambda_2.v, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$
donc $\text{Vect}(u) \subset \text{Vect}(u, v)$.
- $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \{\lambda_1.u + \lambda_2(\lambda.u), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda_1 + \lambda.\lambda_2)u, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda_1.u, \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$
Donc, $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \text{Vect}(u)$

Exercice 6 Les familles suivantes sont-elles des familles libres de \mathbb{R}^3 ?

1. $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 2, 2)$.
2. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
3. $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (2, -1, 3)$ et $e_3 = (-1, 1, -1)$.
4. $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -2)$.

Correction

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La famille (e_1, e_2) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

3. $e_1 = e_3$ donc la famille est liée. Elle n'est pas libre.

4. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 1) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(1, -1, -2) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a une infinité de solution donc la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre, elle est liée. On a, par exemple, $e_1 - e_2 + e_3 = 0$.

Exercice 7 Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de \mathbb{R}^3 ?

1. $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$
2. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 2)$.
3. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
4. $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$.

Correction

1. $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Donc, $(0, 0, 1) \notin \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
Ce n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .
2. $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)) = \{(x, y, 2z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, y, \tilde{z}), (x, y, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^3$.
C'est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .
3. On va écrire les vecteurs de la base canonique comme combinaison linéaire des trois vecteurs proposés.
 $(1, 0, 0) = e_1$, $(0, 1, 0) = e_2 - e_1$ et $(0, 0, 1) = e_3 - e_2$.
Donc, $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.
Or, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$ donc, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.
4. On va raisonner par analyse et synthèse. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

A : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_3 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{z - x + y}{2} \\ \lambda_2 = \frac{x - y + z}{2} \\ \lambda_3 = \frac{y - z + x}{2} \end{cases}$$

S : Posons $\lambda_1 = \frac{z - x + y}{2}$, $\lambda_2 = \frac{x - y + z}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{y - z + x}{2}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 &= \frac{z - x + y}{2}(0, 1, 1) + \frac{x - y + z}{2}(1, 0, 1) + \frac{y - z + x}{2}(1, 1, 0) \\ &= \left(0, \frac{z - x + y}{2}, \frac{z - x + y}{2}\right) + \left(\frac{x - y + z}{2}, 0, \frac{x - y + z}{2}\right) + \left(\frac{y - z + x}{2}, \frac{y - z + x}{2}, 0\right) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Donc, la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de \mathbb{R}^3 . C'est même une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 8 Dans \mathbb{R}^3 , on pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$.

1. Rappeler la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Donner les coordonnées du vecteur $u = (8, 4, 2)$ dans la base \mathcal{B}' .

Correction

1. Il s'agit de la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. On doit donc montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de \mathbb{R}^3 . On va commencer par génératrice en utilisant la méthode d'analyse et synthèse.

- (a) **Analyse** Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ exprimé dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Supposons qu'il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$.

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_3 = a_1 + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_1 - a_1 \\ a_1 = x_2 - (x_1 - a_1) - (x_3 - a_1) \\ a_3 = x_3 - a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 - x_3 \\ a_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ a_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Donc, s'il existe une décomposition dans la famille (e_1, e_2, e_3) , elle est unique et donnée par le système précédent.

- (b) **Synthèse** Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont (x_1, x_2, x_3) .

On a bien $x = (x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$

On a donc trouvé une écriture de $x \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3) .
C'est donc une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

De plus, la décomposition est unique donc c'est également une famille libre.

C'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

3. Par la question précédente, $(8, 4, 2) = 6e_1 + 2e_2 - 4e_3$.

Exercice 9

1. Montrer que la famille $(e_1 = (2, 1, 1), e_2 = (1, 4, 3), e_3 = (0, 1, 1), e_4 = (1, 2, 3))$ forme une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver une base extraite de cette famille.