

Exercice I – Informatique

```
1.
1  def Bernoulli(p):
2      X=rd.random()
3      if X<=p:
4          return 1
5      return 0
```

```
1  def binomiale(n,p):
2      X=0
3      for i in range (1,n+1):
4          X=X+Bernoulli(p)
5      return X
```

```
3.
1  import random as rd
2
3  def jeu():
4      X=rd.randint(0,20)
5      while X<17:
6          X=rd.randint(0,20)
7      return X
```

Exercice II.

1. On vérifie que le vecteur de $\mathbb{R}^3$, $(1, 1, 1)$, n'appartient pas à $\text{Vect}(u, v)$. Donc $\mathbb{R}^3 \not\subset \text{Vect}(u, v)$.

Donc (u, v) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. On constate que $(2, 1, -1) = 5u - 3v$. Donc $(2, 1, -1) \in F$.

3. On suppose qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x(1, 2, 1) + y(1, 3, 2) = (1, 3, 3)$.

$$\text{Donc, } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

C'est absurde. On en déduit que $(1, 3, 3) \notin F$.

- 4.
- $$\begin{aligned} (a, b, c) \in F &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(1, 2, 1) + y(1, 3, 2) = (a, b, c) \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (S) : \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 3y = b \\ x + 2y = c \end{cases} \\ &\iff \text{le système } (S) \text{ possède au-moins une solution.} \end{aligned}$$

Étudions le système (S) :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = a \\ y = b - 2a \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

Ce système possède donc une condition de compatibilité : ainsi, il possède au moins une solution si, et seulement si, $a - b + c = 0$.

On en déduit : $(a, b, c) \in F \iff a - b + c = 0$.

5. On déduit de la question précédente que $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a - b + c = 0\}$

6. $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ donc G est un sev de $\mathbb{R}^3$.

7. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donc, par intersection, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc, $F \cap G = \text{Vect}((1, 0, -1))$.

De plus, $(1, 0, -1)$ est non nul donc c'est une famille libre. Donc, $(1, 0, -1)$ est une base de $F \cap G$.

8. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, montrons qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire : $(1, 1, 0) \in F$ (car $1 - 1 + 0 = 0$) donc $(1, 1, 0) \in F \cup G$.

$(1, -1, 0) \in G$ (car $1 + (-1) + 0 = 0$) donc $(1, -1, 0) \in F \cup G$.

Or $(1, 1, 0) + (1, -1, 0) = (2, 0, 0)$ n'appartient pas à F (car $2 - 0 + 0 \neq 0$) et n'appartient pas à G (car $2 + 0 + 0 \neq 0$). Donc $(1, 1, 0) + (1, -1, 0) \notin F \cup G$.

Ainsi, $F \cup G$ n'est pas stable par combinaison linéaire. Donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice III

1. (a) $g(x)$ est défini si, et seulement si, $\ln x$ est défini et différent de 0. Donc $\mathcal{D}_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Cette limite est finie, donc g est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\begin{aligned}f : [0, 1[\cup]1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

(c) Dérivabilité de f en 0 :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \frac{f(x) - (0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (0)}{x - 0} = 0$. Cette limite est finie, donc f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

(d) Sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (donc a fortiori de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble).

De plus, $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, on en déduit par quotient des limites, puis par somme des limites, que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. Cela veut dire que f' est continue en 0.

Ainsi, f' est continue sur $[0, 1[$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

(e) Nous avons vu que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$: strictement négatif sur $]0, 1[$ et sur $]1, e[$, et strictement positif sur $]e, +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^-$ donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+$ donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations de f .

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $\mathcal{P}_n$: « v_n existe et $v_n \in [e, +\infty[$.»

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car v_0 est bien défini, et $v_0 = 3 \in [e, +\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
 v_n est donc bien défini et appartient à $[e, +\infty[$. Donc v_n appartient à l'ensemble de définition de f . Ainsi, $f(v_n) = v_{n+1}$ est bien défini, et d'après le tableau de variations de f , $f(v_n) \in [e, +\infty[$. Ceci prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite v est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [e, +\infty[$.

(b) $\forall x \in [e, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$.

Soit la fonction $h : x \mapsto x - x^2$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynomiale, et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 - 2x$. Donc en particulier, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $h'(x) \geq 0$, et $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $h'(x) \leq 0$.

En calculant $h(0)$, $h(\frac{1}{2})$, et $h(1)$, on en déduit le tableau de variations de h sur $[0, 1]$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$h'(x)$		+	-
$h(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0

D'après ce tableau de variations, $\forall x \in [0, 1], 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{4}$.

Enfin, $\forall y \in [e, +\infty[, \frac{1}{\ln y} \in [0, 1]$, donc (en posant $x = \frac{1}{\ln y}$) $0 \leq h(\frac{1}{\ln y}) \leq \frac{1}{4}$.

Ainsi, $\forall x \in [e, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

(c) Soit $(x, y) \in [e, +\infty[^2$ fixé quelconque.

- Si $x = y$, l'inégalité est vérifiée. C'est alors une égalité ($0 \leq 0$).
- Supposons $x < y$. La fonction f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $c_{xy} \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_{xy})(y - x)$. Ainsi, $|f(y) - f(x)| = |f'(c_{xy})||y - x|$. Or $c_{xy} \in]x, y[\subset [e, +\infty[$ donc d'après la question précédente, $|f'(c_{xy})| \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$.
- Si $y < x$, on fait de même en inversant les rôles de x et y .

Ainsi, $\forall (x, y) \in [e, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $\mathcal{P}_n$: « $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.»

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $v_0 - e = 3 - e$. Puisque e vaut à peu près 2,7, on a $|v_0 - e| \leq 1$. Donc $|v_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On sait que $v_n \in [e, +\infty[$. Puisqu'il en est évidemment de même pour e , on déduit de la question précédente que $|f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$. Or $f(v_n) = v_{n+1}$ et $f(e) = e$. De plus, d'après $\mathcal{P}_n$, on a $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. On obtient donc : $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{4^n}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

(e) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, e - \frac{1}{4^n} \leq v_n \leq e + \frac{1}{4^n}$. Les deux suites qui encadrent (v_n) tendent toutes les deux vers e . On en déduit, par le théorème des gendarmes, que (v_n) converge vers e .

(f) $4^5 > 10^3$, donc $(4^5)^4 > (10^3)^4$. C'est à dire : $4^{20} > 10^{12}$. Donc $\frac{1}{4^{20}} < 10^{-12}$.

Donc $|v_{20} - e| \leq \frac{1}{4^{20}} \leq 10^{-12}$. Ainsi, pour $n = 20$, v_{20} est une valeur approchée de e à 10^{-12} près. Par décroissance, on en déduit que pour tout $n \geq 20$, v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

(g)

```

1 def suite(n):
2     v = 3
3     for i in range(n):
4         v = v / log(v)
5     return v

```

```

1 def valeurapprochee(eps):
2     n = 0
3     v = 3
4     while 1/(4**n) > eps:
5         v = v/log(v)
6         n = n + 1
7     return n, v

```

Exercice IV

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{-1}{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

Posons $X = \frac{-1}{x}$. Alors, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

On en déduit que f est continue à droite en 0 mais pas à gauche.

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -X^3 e^X = 0$ donc f est dérivable à droite en 0.

- (c) f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme composée puis produit de fonctions de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{x^3} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} = \frac{-2x + 1}{x^4} e^{\frac{-1}{x}}$$

En posant $P_1 = -2X + 1$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^4} e^{\frac{-1}{x}}$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = \frac{-2x^4 - 4(-2x + 1)x^3}{x^8} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{-2x + 1}{x^4} \cdot \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} = \frac{6x^4 - 6x^3 + x^2}{x^8} e^{\frac{-1}{x}} = \frac{6x^2 - 6x + 1}{x^6} e^{\frac{-1}{x}}.$$

En posant $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^6} e^{\frac{-1}{x}}$.

2. (a) f est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ comme composée puis produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.
(b) On raisonne par récurrence en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{\frac{-1}{x}}$$

I : Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$ donc en posant $P_0 = 1$, on a bien $Q(0)$ vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \frac{P'_n(x)x^{2n+2} - (2n+2)x^{2n+1}P_n(x)}{(x^{2n+2})^2} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \cdot \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left[\frac{P'_n(x)x^{2n+2} - (2n+2)x^{2n+1}P_n(x)}{x^{4n+4}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}} \right] e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left[\frac{P'_n(x)x^2 - (2n+2)xP_n(x)}{x^{2n+4}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}} \right] e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \frac{P'_n(x)x^2 + [1 - 2(n+1)x]P_n(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{\frac{-1}{x}} \end{aligned}$$

En posant $P_{n+1} = X^2 P'_n(X) + [1 - 2(n+1)X]P_n(X)$, on a bien $Q(n+1)$ vraie.

C : Par le principe de récurrence, pour tout entier n , $Q(n)$ est vraie.