Chapitre 27 Sous-espaces vectoriels de dimension finie. (prof)

Table des matières

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Par exemple, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Dimension finie.

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.

Soit F un sous$-$espace vectoriel de E. On dit que <u>F est de dimension finie</u> lorsque F possède une famille génératrice finie.

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists\ (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}) \in F^p \text{ tel que } F = \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$$

Sinon, on dit que <u>F est de dimension infinie</u>.

Exemple 2. Étudier $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ / x + 3y = 0\}$

Exemple 3. Étudier $G = \mathbb{R}_3[\mathbf{X}]$.

Théorème 4.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ est de dimension infinie.

1.2 Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème 5.

Soit F un sous$-$espace vectoriel de E, de dimension finie.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille génératrice de F : $F =$Vect$(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.
Si $\overrightarrow{e_p} \in \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{p-1}})$ alors $F =$Vect$(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{p-1}})$.

Remarque 6. Les familles génératrices n'ont pas toutes le même nombre de vecteurs.

Théorème 7.

Soit F un sous$-$espace vectoriel de E.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}})$ une famille de vecteurs de F.
Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est libre et si $\overrightarrow{e_{p+1}} \notin \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ alors la famille $(\overrightarrow{e_{p+1}} \notin \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{p+1}})$ est aussi une famille libre.

Remarque 8. Les familles libres n'ont pas toutes le même nombre de vecteurs.

Théorème 9.

Soit F un sous$-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension finie.
Toutes les bases de F ont le même cardinal, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs.

Définition 10.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension finie.
On appelle dimension de F le cardinal commun à toutes les bases de F. On note cet entier $\dim(F)$.

Convention. Lorsque $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on pose $\dim(F) = 0$.
Lorsque F est de dimension infinie, on pose $\dim(F) = +\infty$.

Remarque 11. Il faut donc trouver des bases de sous-espaces vectoriels.

Exemple 12.

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{R}_3[\mathbf{X}]) = 4$.

1.3 Recherche de bases

Théorème 13 (Théorème de la base extraite)**.**

Soit F un sous−espace vectoriel de E de dimension finie.
De tout famille génératrice de F on peut extraire une base de F.

Exemple 14. Soit $F =$Vect$((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1), (-1, 0, 1, 1))$.
Déterminer une base puis la dimension de F.

Théorème 15 (Théorème de la base incomplète)**.**

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie.
Toute famille libre de vecteurs de F peut être complétée pour obtenir une base de F.

Exemple 16. Soit $(\overrightarrow{u_1} = (3, 2, -4, -1), \overrightarrow{u_2} = (2, 1, -2, -1))$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Soit $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y + z + t = 0\big\}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ appartiennent à F.
2. Cette famille est-elle libre ?
3. Cette famille est-elle génératrice de F ?
4. Complétez la pour obtenir une base de F.

1.4 Application à l'égalité de sous-espaces vectoriels

Théorème 17.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.
Alors, $\dim(F) \leq n$.

Exemple 18. On travaille dans $E = \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] \ / \ P(0) = 0\}$.

1. Rappeler pourquoi F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.
2. Déterminer sa dimension.

Théorème 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie.
Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Remarque 20. Pour montrer que deux sous−espaces vectoriels sont égaux, il y a donc deux méthodes.
- Montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$
- Montrer que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Exemple 21. Soient $F = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $G = \text{Vect}((1,2,1),(1,0,-1))$. Montrer que $F = G$.

Définition 22.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.
1. On dit que F est une droite vectorielle lorsque $\dim(F)=1$
2. On dit que F est un plan vectoriel lorsque $\dim(F)=2$

2 Familles de vecteurs en dimension finie.

2.1 Lorsque la dimension est connue.

Théorème 23.

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie p.
1. Toutes les familles libres ont au plus p vecteurs.
2. Les familles de cardinal supérieur ou égal à $p+1$ sont des familles liées.
3. (Les bases de F ont exactement p vecteurs.)
4. Les familles génératrices de F ont au moins p vecteurs.
5. Les familles dont le cardinal est strictement inférieur à p ne sont pas des familles génératrices de F.

Remarque 24. card(famille libre) $\leq$ card(base) $\leq$ card(famille génératrice).

Exemple 25. La famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exemple 26. La famille $\mathcal{F} = ((1,4,0),(-\sqrt{5},1,1),(0,-2,1),(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}))$ est-elle une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?

Théorème 27.

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie p.
1. Une famille libre ayant exactement p vecteurs est une base de E.
2. Une famille génératrice de E ayant exactement p vecteurs est une base de E.

Exemple 28. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,2,0),(0,1,1),(0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 29. Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que deux vecteurs orthogonaux forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 30. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que trois vecteurs deux à deux orthogonaux forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 31.

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie.
Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ une famille de vecteurs de F.
On appelle rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ la dimension de $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ et on note

$$rg(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q}) = \text{dim}(\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})).$$

Remarque 32. Pour déterminer le rang de $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$, on doit déterminer une base de $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$).

Exemple 33. Déterminer le rang des familles suivantes.

1. $((1, 0), (0, 1))$
2. $((1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$
3. $(1, \mathbf{X}, 3\mathbf{X} + 5)$.

Exemple 34. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E.

- $\text{rg}(\overrightarrow{u}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \overrightarrow{u} \neq 0_E \\ 0 \text{ si } \overrightarrow{u} = 0_E \end{cases}$
- $\text{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} 2 \text{ si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont linéairement indépendants} \\ 1 \text{ si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont linéairement dépendants et non tous les deux nuls} \\ 0 \text{ si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont tous les deux nuls} \end{cases}$

Théorème 35.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ une famille de vecteurs de E.
La famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ est libre si, et seulement si, le rang de $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ est égal à q.

2.3 Lien avec le rang d'une matrice.

Définition 36.

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie p.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F.
Soit $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{e_k}$ un vecteur de F.
On appelle matrice de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne contenant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Définition 37.

Soit F un sous−espace vectoriel de E, de dimension finie p.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F.
$\overrightarrow{x_1} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{k,1}.\overrightarrow{e_k}$, ..., $\overrightarrow{x_q} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{k,q}.\overrightarrow{e_k}$ des vecteurs de F.
On appelle matrice de la famille $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_q})$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice suivante

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_q}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1q} \\ \lambda_{21} & \dots & \dots & \lambda_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pq} \end{pmatrix}$$

.

Exemple 38. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soient $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0, -2)$, $\overrightarrow{v} = (1, 6, 1, -3)$, $\overrightarrow{w} = (-4, 0, 0, 1)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 39. Ecrire la matrice de la famille $(3\mathbf{X} + 5, \mathbf{X} - 2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[\mathbf{X}]$.

Exemple 40. Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. Soit B une base de F. Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$.

Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_p$$

Théorème 41.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ une famille de vecteurs de E.
Le rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ est égal au rang de la matrice de $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_q})$ dans une base quelconque de E.

Exemple 42. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on pose

$$\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1, 0) , \overrightarrow{u_2} = (-1, 1, 1, 0) , \overrightarrow{u_3} = (1, 5, 3, 0)$$

1. Sans aucun calcul, justifier que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer le rang de cette famille.
3. On note F =Vect$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$. Déterminer une base de F.
4. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

1. La famille est constituée de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4 donc elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
2. On utilise les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

   La famille est de rang 2.
3. $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$. Or, $\overrightarrow{u_3} = 2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ donc $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
   La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre donc c'est une base de F.
4. $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc il faut ajouter 2 vecteurs. On va les choisir parmi ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   On remarque que $\overrightarrow{e_1} = (0, 0, 0, 1) \notin F$ donc la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1})$ est libre.

   Soit $\overrightarrow{e_4} = (1, 0, 0, 0)$. On va étudier la liberté de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4})$.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \lambda_3.\overrightarrow{e_1} + \lambda_4.\overrightarrow{e_4} = 0_4$.
   Donc $\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_4 = 0\end{cases}$
   Donc $\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 = -\lambda_2\\ \lambda_4 = 0\end{cases}$
   Donc $\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ -\lambda_2 = 0\\ \lambda_1 = -\lambda_2\\ \lambda_4 = 0\end{cases}$
   Donc $\begin{cases}\lambda_3 = 0\\ -\lambda_2 = 0\\ \lambda_1 = 0\\ \lambda_4 = 0\end{cases}$
   Donc la famille est libre. Elle est constituée de 4 vecteurs en dimension 4 donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Remarque 43. On peut montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^4$.