

**Exercice 1** Pour chacun des ensembles  $F$  proposées, déterminer une base et la dimension.

1.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2y + z - t = 0\}$
2.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y = 3z\}$
3.  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] / P(1) = 0\}$
4.  $F = \text{Vect}((\mathbf{X} - 1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X} + 1)^2)$ .

**Exercice 2** On considère l'ensemble  $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous–espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer une base de  $E$  et sa dimension.

**Exercice 3** Soient  $F$  et  $G$  les deux ensembles suivants

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + t = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\} \\ G &= \text{Vect}((-2, 1, 3, 1), (0, 1, -1, -1)) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $F$  est un sous–espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et déterminer sa dimension.
2. Montrer que  $G \subset F$ .
3. Montrer que  $G = F$ .

**Exercice 4** Déterminer le rang des familles suivantes :

1.  $\vec{e}_1 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (2, 0, 1, 1)$ ,  $\vec{e}_4 = (0, -2, 1, -1)$
2.  $\vec{e}_1 = (-1, 2, 2)$ ,  $\vec{e}_2 = (4, -2, -1)$ ,  $\vec{e}_3 = (3, -1, 1)$ ,  $\vec{e}_4 = (-7, 3, 0)$
3.  $\vec{e}_1 = \mathbf{X} - 1$ ,  $\vec{e}_2 = 2\mathbf{X}$ ,  $\vec{e}_3 = \mathbf{X}^2 - 3\mathbf{X}$  et  $\vec{e}_4 = 3\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 - 2$

**Exercice 5** On considère dans  $\mathbb{C}^3$  les vecteurs  $u = (1, 2, 3)$  et  $v = (3, 2, 1)$ .

1. La famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  est-elle une base de  $\mathbb{C}^3$  ?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathbb{C}^3$  ?
3. Le vecteur  $(1, 4, 7)$  appartient-il à  $F$  ? si oui, déterminer ses coordonnées dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .
4. Le vecteur  $(-1, 6, 9)$  appartient-il à  $F$  ? si oui, déterminer ses coordonnées dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .