

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y + 5 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) + P(1) \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - z) \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x, y) \end{cases}$
6. $\phi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' + f \end{cases}$

Lorsque c'est possible, donner leur matrice dans les bases canoniques associées.

Correction

1. Soit $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)$.

$$f(u + \lambda.v) = x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 = x_1 + y_1 + \lambda(x_2 + y_2) = f(u) + \lambda.f(v)$$

Par la caractérisation, f est linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$$f(1, 0) = 1 \text{ et } f(0, 1) = 1 \text{ donc } \boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

2. $f(0, 0) \neq 0$ donc f n'est pas linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
3. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(P + \lambda.Q) = (P + \lambda.Q)(0) + (P + \lambda.Q)(1) = P(0) + \lambda.Q(0) + P(1) + \lambda.Q(1) \\ = P(0) + P(1) + \lambda(Q(0) + Q(1)) = f(P) + \lambda f(Q).$$

Par la caractérisation, f est linéaire de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ dans \mathbb{R} .

Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$$f(1) = 2 = 2.1 + 0\mathbf{X} + 0\mathbf{X}^2 \text{ et } f(\mathbf{X}) = 1 = 1.1 + 0\mathbf{X} + 0\mathbf{X}^2 \text{ et } f(\mathbf{X}^2) = 1 = 1.1 + 0\mathbf{X} + 0\mathbf{X}^2 \text{ donc}$$

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. Soit $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$.

$$f(u + \lambda.v) = (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, x_1 + \lambda x_2 - z_1 - \lambda z_2) \\ = (x_1 + y_1, x_1 - z_1) + \lambda(x_2 + y_2, x_2 - z_2) \\ = f(u) + \lambda.f(v)$$

donc f est linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 .

Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$$f(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1), f(0, 1, 0) = (1, 0) \text{ et } f(0, 0, 1) = (0, -1) = -1(0, 1) \text{ donc}$$

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

5. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$. $\exists (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$.
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$.

$$f(u + \lambda.v) = (z_1 + \lambda z_2, x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\ = (z_1, x_1, y_1) + \lambda(z_2, x_2, y_2) \\ = f(u) + \lambda f(v)$$

donc f est linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$$f(1, 0, 0) = (0, 1, 0), f(0, 1, 0) = (0, 0, 1) \text{ et } f(0, 0, 1) = (1, 0, 0) \text{ donc } \boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

6. Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' + f + \lambda g = f' + f + \lambda(g' + g) = \phi(f) + \lambda\phi(g)$$

donc ϕ est linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'espace de départ n'est pas de dimension finie donc il n'est pas possible d'écrire la matrice de f .

Exercice 2 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x + y, 0, z, z) \end{cases}$

- Déterminer $\text{Ker}(f)$ et donnez en une base.
- Déterminer $\text{Im}(f)$ et donnez en une base.
- Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Correction

1. $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + y, 0, z, z) = (0, 0, 0, 0)\} = \{(x, -x, 0, t) \in \mathbb{R}^4\}$
 $= \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)).$

Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires, c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.
 Donc, $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

2. $\text{Im}(f) = \{(x + y, 0, 0, t), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)).$

Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires, c'est donc une base de $\text{Im}(f)$.
 Donc, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

3. $\text{mat}_{\mathcal{B}^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$

- Montrer que f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .
- Montrer que f est bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .
- Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Correction

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. $\exists (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2).$

$$\begin{aligned} f(u + \lambda.v) &= (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, x_1 + \lambda x_2 - y_1 - \lambda y_2) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + \lambda(x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

2. On va utiliser la caractérisation de la bijectivité pour les applications linéaires.

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + y, x - y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0 \text{ et } x - y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

Donc, f est injective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\text{Im}(f) = \{(x + y, x - y), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1), (1, -1)) = \mathbb{R}^2$$

Donc, f est surjective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Donc, f est bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. $\exists! u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = v$. Donc, $(x + y, x - y) = (a, b)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow u = \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2} \right).$$

$$\text{Ainsi, } f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) \mapsto \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2} \right) \end{cases}$$

3. La base canonique de \mathbb{R}^2 est $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$.

$$f(1, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1) \text{ et } f(0, 1) = (1, -1) = 1(1, 0) - 1(0, 1).$$

$$\text{Donc, } \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 telle que $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Correction

1. La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
Par le théorème 8, on a bien l'existence et l'unicité d'une telle application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) = f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 1, 1) \\ &= (x + y + z, y + z, x) \end{aligned}$$

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x + y + z, y + z, x) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}}$. (Ainsi, f est injective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3).

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)).$$

Or, la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 donc $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$.

(Ainsi, f est surjective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3).

Exercice 5 Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{cases}$

1. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

1. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(M + \lambda.N) = {}^t(M + \lambda.N) = {}^tM + \lambda{}^tN = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$$

Par la caractérisation, φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On va utiliser la caractérisation des applications linéaires bijectives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - $\text{Ker}(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tM = 0\} = \{0\}$. Donc, f est injective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - $\text{Im}(\varphi) = \{{}^tM, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, f est surjective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Finalement, φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Posons $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\varphi(e_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1,$$

$$\varphi(e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3,$$

$$\varphi(e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2,$$

$$\varphi(e_4) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4.$$

$$\text{Donc, } \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Correction Le rang n'est pas modifié par les opération élémentaires sur les lignes.

$$\text{rg}(A) \stackrel{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rg}(B) \stackrel{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est échelonnée et elle a 3 pivots (non nuls) donc $\operatorname{rg}(C) = 3$.

On va étudier les différentes valeurs possibles pour a et b .

- Si $a = 0$: par échange des lignes (opérations élémentaires sur les lignes) on obtient :

$$\operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée et

- Si $b = 0$, $\operatorname{rg}(D) = 0$ (D est la matrice nulle)
 - Si $b \neq 0$, $\operatorname{rg}(D) = 4$.
- Si $a \neq 0$: on fait subir à D l'algorithme du pivot de Gauss : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{b}{a}L_2$

puis $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{b}{a}L_3$.

$$\text{Ainsi, } \operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & 0 & a & \frac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{b^4}{a^3} \end{pmatrix}.$$

cette matrice est échelonnée puisque $a \neq 0$. Elle est de rang au moins 3. Son rang dépend de la valeur du coefficient en bas à gauche.

$$\begin{aligned} a - \frac{b^4}{a^3} = 0 &\iff \frac{a^4 - b^4}{a^4} = 0 \\ &\iff a^4 = b^4 \\ &\iff \left(\frac{b}{a}\right)^4 = 1 \text{ (car } a \neq 0) \\ &\iff \frac{b}{a} \in \{1, -1\} \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $a \neq 0$ et $b \in \{a, -a\}$, alors $\operatorname{rg}(D) = 3$.
- Si $a \neq 0$ et $b \notin \{a, -a\}$, alors $\operatorname{rg}(D) = 4$.

Exercice 7 Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter f , $f^2 (= f \circ f)$ et f^3 .
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker f^2$.
4. Déterminer $\ker f^3$.

Correction

1. • La matrice M est de taille 3 donc l'application linéaire f est définie sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 sont données

$$\text{par } M. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 14y + 2z \\ x - 4y \\ x - 10y + 2z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - 14y + 2z, x - 4y, x - 10y + 2z) \end{cases}$$

- On sait que la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de f^2 est la matrice M^2 .

$$\text{Or, } M^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Donc, } f^2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-8x + 8y + 8z, -2x + 2y + 2z, -6x + 6y + 6z) \end{cases}$$

- On sait que la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de f^3 est la matrice M^3 .

$$\text{Or, } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc, } f^3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (0, 0, 0) \end{cases}$$

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow (2x - 14y + 2z, x - 4y, x - 10y + 2z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 14y + 2z = 0 \\ x - 4y = 0 \\ x - 10y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 14y + 2z = 0 \\ 6y - 2z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 14y + 2z = 0 \\ z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 3y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}((4, 1, 3))}$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow (-8x + 8y + 8z, -2x + 2y + 2z, -6x + 6y + 6z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow -x + y + z = 0$$

Donc, $\boxed{\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))}$.

Cette famille est libre, c'est une base de $\text{Ker}(f^2)$ donc $\boxed{\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2}$.

4. $f^3 = 0$ donc $\boxed{\text{Ker}(f^3) = \mathbb{R}^3}$.

Exercice 8 [**]

- Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 telle que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
 - Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
 - Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est libre. En déduire que c'est une base de \mathbb{R}^3 .
 - Déterminer la matrice de f dans cette base.
- Soient f et g deux applications linéaires de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

Correction

- $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc il existe au moins un vecteur u de \mathbb{R}^3 tel que $f(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
 - Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On compose par f linéaire : $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Or, $f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On compose de nouveau par f linéaire : $\lambda_1 f^2(u) + \lambda_2 f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Or, $f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\lambda_1 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Or, $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$.
En reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que $\boxed{\lambda_2 = 0}$.
Puis, en reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que $\boxed{\lambda_3 = 0}$.
Finalement, $\boxed{(u, f(u), f^2(u))}$ est libre.
On est dans un espace vectoriel de dimension 3 donc, toute famille libre de 3 vecteurs est une base donc $\boxed{(u, f(u), f^2(u))}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(c) Posons $e_1 = u$, $e_2 = f(u)$ et $e_3 = f^2(u)$.

$f(e_1) = f(u) = e_2$, $f(e_2) = f^2(u) = e_3$ et $f(e_3) = f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc

$$\text{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On raisonne par double implication.

\Rightarrow : Soit $x \in \text{Im}(f)$. $\exists y \in E$ tel que $f(y) = x$. Donc $g(x) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = 0$.

Donc $x \in \text{Ker}(g)$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

\Leftarrow : Soit $x \in E$. $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Or, $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Ker}(g)$ donc $g(f(x)) = 0$.

Donc, $g \circ f = 0$.