Chapitre 28 Applications linéaires et matrices (prof)

Table des matières

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixés dans tout le chapitre.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.

On appelle application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ toute fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ telle que

1. $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^p)^2, \ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.
2. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ f(\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.

1. Soit $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto 3x$ est une application linéaire.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto 3x + 2y$ est une application linéaire.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto 3x + 2y - 1$ n'est pas une application linéaire.

Théorème 3.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
Si f est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Théorème 4.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. f est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
2. $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^p)^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v})$.

Exemple 5. Soit $E = F = \mathbb{R}^2$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est une application linéaire.

Exemple 6. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ est une application linéaire.

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $E = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$ et $F = \mathbb{K}_{n-1}[\mathbf{X}]$. Montrer que $f : P \mapsto P'$ est linéaire.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 8.

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

$$\forall(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2, \ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

La somme de deux applications linéaires ou la multiplication par un scalaire d'une application linéaire est encore une application linéaire.

Théorème 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.
(La composée d'applications linéaires est une application linéaire)

Exemple 10. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[\mathbf{X}] \to \mathbb{K} \\ P \mapsto P'(0) \end{array} \right.$ est une application linéaire.

Théorème 11.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
Si f est linéaire et bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ alors f^{-1} est linéaire et bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
(La bijection réciproque d'une bijection linéaire est linéaire)

1.3 Applications linéaires déjà rencontrées

Exemple 12.

2 Noyau et Image d'une application linéaire

2.1 Définitions

Définition 13.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^n}$:
$$\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \;/\; f(\overrightarrow{u}) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$
2. On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de $\mathbb{R}^p$:
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^p) = \{f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p\} = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n,\ \exists \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p,\ \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})\}$$

Exemple 14. Déterminer le noyau et l'image de $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \end{array} \right.$.

Exemple 15. Déterminer le noyau et l'image de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y, y - x)$.

Exemple 16. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z) \end{array}$$
Donner des vecteurs du noyau et des vecteurs de l'image de f. Déterminer $\ker f$. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

Exemple 17. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, -x + 3y, 2y) \end{array}$$
Déterminer $\ker f$. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

Exemple 18. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + 4y - 2z \end{array}$$

Déterminer $\ker f$. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

Théorème 19.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 20. Montrer que $A = \{P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\ P(0) = 0\}$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de dimension finie. Donner une base de A.

2.2 Lien avec surjectivité et injectivité

Théorème 21.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
1. f est surjective signifie que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
2. f est injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^p}}\right\}$.

Exemple 22. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y+z, x+y-z) \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 23. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[\mathbf{X}] \to \mathbb{R}[\mathbf{X}] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

3 Matrices d'une application linéaire

Remarque 24. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
Pour définir complètement f, de quels vecteurs a-t-on besoin ?

3.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 25.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{v_i}$.

Remarque 26. Cette proposition dit qu'une application linéaire est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Exemple 27. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (1,2)$ et $f(0,0,1) = (2,1)$ et la déterminer.

Exemple 28. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(2,1) = (1,1,0)$ et $f(-1,1) = (0,1,1)$ et la déterminer.

3.2 Définition

Définition 29.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$.

On appelle <u>matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$</u> la matrice de la famille de vecteurs $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \dots & f(\overrightarrow{e_j}) & \dots & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \begin{array}{c} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_n} \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

<u>Exemple 30.</u> Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto \left(x+y, x-y, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{cases}$
Exprimer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

<u>Exemple 31.</u> Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1,1),(1,-1))$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+y) \end{array}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Théorème 32.

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\overrightarrow{u})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\overrightarrow{u})$$

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont obtenues en calculant $M.X$.

3.3 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Théorème 33.

Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f + \lambda.g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \lambda.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g).$$

Théorème 34.

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_G$ une base de $\mathbb{R}^q$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Remarque 35. Le produit matriciel, comme la composée, ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.

Théorème 36.

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f \circ \cdots \circ f) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\big)^k.$$

Remarque 37. Il est donc utile de savoir calculer facilement des puissances de matrices carrées.

Exemple 38. Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y+z) \end{array} \right. \quad , \; g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y, x-y, x+y) \end{array} \right.$$

Peut-on composer f et g ? Dans quel ordre ? Déterminer la composée qui est définie et sa matrice dans les bases canoniques.

Théorème 39.

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$.
Si f est bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\big)^{-1}$$

Remarque 40. Il est donc utile de savoir inverser facilement des matrices.

3.4 Application canoniquement associée à une matrice

Théorème 41.

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.
L'application suivante est linéaire :

$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

On l'appelle application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Exemple 42. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application canoniquement associée à A.

Exemple 43. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
Expliciter f, f^2, f^3.

4 Rang d'une application linéaire

4.1 Théorème du rang

Définition 44.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de son image : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème 45.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Alors, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$.

Exemple 46. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, y-z, x+y) \end{array} \right.$
Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.

Théorème 47 (Théorème du rang)**.**

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \ .$$

Exemple 48. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array} \right.$
Déterminer le rang de f puis une base de $\text{Im}(f)$.

Théorème 49.

Soient E et F deux $K-$espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
2. f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
3. f est bijective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim F$.

Théorème 50.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels **de même dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a équivalence entre :

1. f est bijective de E dans F
2. f est injective de E dans F
3. f est surjective de E dans F

Exemple 51. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y+z, x+y+z) \end{array} \right.$
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 52. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_2[\mathbf{X}]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son application réciproque. On commencera par déterminer $f^{-1}(1,0,0)$, $f^{-1}(0,1,0)$, et $f^{-1}(0,0,1)$.

4.2 Lien avec les autres définitions de rang

Théorème 53.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Le rang de A est le rang du système associé à A : $AX = 0_n$.
2. Le rang de A est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A.
3. Le rang de A est le rang de la famille de vecteurs formée par les colonnes de A.

Exemple 54. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A de deux manières.

Exemple 55. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, -y+z, x+y+z) \end{array} \right.$. Déterminer le rang de f.

Exemple 56. Soit $\mathcal{F} = ((0,1,2), (-1,-1,1), (1,0,2), (0,-1,3))$. Déterminer le rang de $\mathcal{F}$.