

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_0^1 (x^2 + 3x + 12)dx.$
2. $B = \int_0^1 e^{3x}dx.$
3. $C = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx.$
4. $D = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}dx.$
5. $E = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx.$
6. $F = \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)}dx.$

Correction On va utiliser des primitives des fonctions sous l'intégrale.

1. $\int_0^1 (x^2 + 3x + 12)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 12x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 12 = \frac{83}{6}$
2. $\int_0^1 e^{3x}dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}.$
3. $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx = \left[\ln(|x^2+x+2|) \right]_{-1}^1 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2).$
4. $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_{-1}^1 \frac{2x}{2(x^2+1)}dx = \left[\frac{\ln(|x^2+1|)}{2} \right]_{-1}^1 = 0.$
5. $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^2 = \frac{\ln(2)^2}{2}.$
6. $\int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)}dx = \left[\ln(|\ln(x)|) \right]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)).$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\int_1^2 x \ln(x)dx$
2. $\int_1^2 x \sin(x)dx$
3. $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x+1}}dx$
4. $[*] \int_1^2 e^{3x} \cos(5x)dx$

Correction

1. On pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_1^2 x \ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2 \ln(2) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

2. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sin(x)dx &= \left[-x \cos(x) \right]_1^2 - \int_1^2 (-\cos(x))dx = -2 \cos(2) + \cos(1) + \left[\sin(x) \right]_1^2 \\ &= -2 \cos(2) + \cos(1) + \sin(2) - \sin(1) \end{aligned}$$

3. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 2\sqrt{3x+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx = \left[2x\sqrt{3x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{3x+1}dx = 4 - 2 \int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$$

Or, $x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur $[0, 1]$ donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx = 4 - 2 \left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 4 - \frac{4}{9}(8-1) = \frac{8}{9}$$

4. On pose $\begin{cases} u(x) = e^{3x} \\ v'(x) = \cos(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3e^{3x} \\ v(x) = \frac{\sin(5x)}{5} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx = \left[e^{3x} \frac{\sin(5x)}{5} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3}{5} e^{3x} \sin(5x) dx = e^6 \frac{\sin(10)}{5} - e^3 \frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5} \int_1^2 e^{3x} \sin(5x) dx$$

On fait une seconde intégration par parties avec $\begin{cases} u(x) = e^{3x} \\ v'(x) = \sin(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3e^{3x} \\ v(x) = -\frac{\cos(5x)}{5} \end{cases}$.

$$\int_1^2 e^{3x} \sin(5x) dx = \left[-e^{3x} \frac{\cos(5x)}{5} \right]_1^2 + \frac{3}{5} \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx = -e^6 \frac{\cos(10)}{5} + e^3 \frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5} \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx &= e^6 \frac{\sin(10)}{5} - e^3 \frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5} \left(-e^6 \frac{\cos(10)}{5} + e^3 \frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5} \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx \right) \\ \left(1 + \frac{9}{25} \right) \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx &= e^6 \frac{\sin(10)}{5} - e^3 \frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5} \left(-e^6 \frac{\cos(10)}{5} + e^3 \frac{\cos(5)}{5} \right) \\ \int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx &= \frac{25}{34} \left[e^6 \frac{\sin(10)}{5} - e^3 \frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5} \left(-e^6 \frac{\cos(10)}{5} + e^3 \frac{\cos(5)}{5} \right) \right] \end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6} dx$ avec $t = x^3$ 2. $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ avec $t = \ln(x)$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)} dx$ avec $t = \sin(x)$.

Correction

1. On utilise le changement de variables $t = x^3$. On a donc $\frac{dt}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dt = 3x^2 dx$.

De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = 1$, on a $t = 1$.

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. On pose $t = \ln(x)$. On a donc $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

De plus, pour $x = 1$, on a $t = 0$ et pour $x = e$, on a $t = 1$. Finalement,

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3. On pose $t = \sin(x)$. On a donc $\frac{dt}{dx} = \cos(x) \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{\cos(x)} = \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{6}$, on a $t = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 x^n dx$ existe et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 x^n dx$ existe.
En utilisant une primitive, on obtient $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. $1 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$.
Or, $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$.

Exercice 5

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt = 0$.
2. On va comparer l'intégrale à étudier à celle de la question précédente. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
Toute fonction continue sur un segment y est bornée (et atteint ses bornes).
 $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [0, 1], m \leq f(t) \leq M$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall t \in [0, 1], m \leq f(t) \leq M \\
&\Rightarrow \forall t \in [0, 1], m \cdot t^n \leq f(t) \cdot t^n \leq M \cdot t^n \\
&\Rightarrow \int_0^1 m \cdot t^n dt \leq \int_0^1 f(t) \cdot t^n dt \leq \int_0^1 M \cdot t^n dt \\
&\Rightarrow \frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 f(t) \cdot t^n dt \leq \frac{M}{n+1}
\end{aligned}$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

Exercice 6 Déterminer la limite des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + k^3}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction On va modifier l'écriture pour faire apparaître la fonction f à utiliser dans le théorème des sommes de Riemann.

$$1. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction définie par $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$.

Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln(1+x^3) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$$

·
Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{\ln(2)}{3}$.

$$2. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. b_n = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sin(\pi x)$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} > 0$$

·
Par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

$$3. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction définie par $\forall x \in [0, 1], f(x) = x \cos(\pi x)$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \int_0^1 x \cos(\pi x) dx$$

·
On utilise alors une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 x \cos(\pi x) dx = \left[x \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi} dx = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

·
Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{2}{\pi^2}$.

Exercice 7 On s'intéresse aux fonctions définies par $f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$ et $g : x \mapsto xf(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g .
2. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Déterminer les variations de g .
4. Pour $x \in]-1, 0[$, proposer une minoration de $g(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R}, -1 \notin [0, x]\} =]-1, +\infty[$. Par produit, la fonction g est aussi définie sur $] -1, +\infty[$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$ est continue sur $] -1, +\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in] -1, +\infty[, f'(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

3. Par produit, g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in] -1, +\infty[, g'(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt + x \cdot \frac{e^x}{1+x}$$

On va étudier le signe de g' .

Soit $x \in [0, +\infty[$. Par positivité de l'intégrale et de l'exponentielle, $g'(x) \geq 0$.

Soit $x \in] -1, 0[$.

$$g'(x) = - \int_x^0 \frac{e^t}{1+t} dt + x \cdot \frac{e^x}{1+x}$$

Donc, $g'(x) \leq 0$.

Finalement, g est décroissante sur $] -1, 0[$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $x \in] -1, 0[$. On a donc $g(x) = -x \int_x^0 \frac{e^t}{1+t} dt$.

$$\begin{aligned} \forall t \in] -1, 0[, \frac{e^t}{1+t} &\geq \frac{e^{-1}}{(1+t)} \\ \Rightarrow \int_x^0 \frac{e^t}{1+t} dt &\geq \int_x^0 \frac{1}{e(1+t)} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ \Rightarrow \int_x^0 \frac{e^t}{1+t} dt &\geq -\frac{\ln(1+x)}{e} \\ \Rightarrow -x \int_x^0 \frac{e^t}{1+t} dt &\geq x \frac{\ln(1+x)}{e} \quad \text{car } -x \geq 0 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -1^+} x \frac{\ln(1+x)}{e} = +\infty$. Par minoration, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$.

Exercice 8 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$
- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
On pourra utiliser une intégration par parties
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.
- Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.

Correction

- $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad , \quad 0 \leq \cos(t) < 1 \\ \text{donc } \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad , \quad 0 \leq (\cos(t))^{n+1} < (\cos(t))^n \text{ car } \cos(t)^n > 0 \end{aligned}$$

En intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

De plus, la fonction $x \mapsto \cos(t)^n$ est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $I_n > 0$.

3. On a montré que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

De plus, les termes de la suites sont strictement positifs donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer I_{n+2} on va utiliser une intégration par parties avec

$$\begin{cases} u'(x) = \cos(t) \\ v(x) = (\cos(t))^{n+1} \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} u(x) = \sin(t) \\ v'(x) = -(n+1) \sin(t) (\cos(t))^n \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin(t) (\cos(t))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 (\cos(t))^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) (\cos(t))^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \\ I_{n+2} &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \\ I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n \end{aligned}$$

5. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$.

Or, par équivalent, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1.$$

6. On calcule le premier terme pour avoir une idée de la valeur constante de cette suite : $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

On pose comme hypothèse de récurrence : $P(n) : (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

On a traité l'hérédité dans notre calcul précédent.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} (n+2) I_{n+1} I_{n+2} &= I_{n+1} (n+2) I_{n+2} = I_{n+1} (n+1) I_n \text{ par le calcul de la question 2.} \\ &= (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

La suite est donc constante.

Exercice 9 [*] Par une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx$$

Penser à bien choisir les primitives.

Correction

On pose $\begin{cases} u(x) = (\arctan(x))^2 \\ v'(x) = x \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{1+x^2} \arctan(x) \\ v(x) = \frac{x^2+1}{2} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx = \left[\frac{x^2+1}{2} (\arctan(x))^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \arctan(x) \cdot \frac{x^2+1}{2} dx = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan(x) dx$$

On va appliquer une deuxième intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u(x) = \arctan(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan(x) dx = \left[x \arctan(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$$

Finalement,
$$\int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2).$$

Exercice 10 [*] *Comparaison suites-intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En utilisant la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$, montrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

(c) En déduire que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

(d) Montrer que $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

2. En déduire que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Correction

1. (a) Soit $t \in [k, k+1]$. Donc, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

Donc, par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$.

(b) Or, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k+1}$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

(c) On va ensuite additionner les inégalités précédentes.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On effectue un changement d'indice dans la somme de gauche et on applique la relation de Chasles dans l'intégrale pour obtenir

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(d) Or, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 = S_n - 1$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$.

De plus, $\int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$.

En manipulant séparément les deux inégalités, on obtient $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

2. Soit $n \geq 2$.

$$\frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)}.$$

Donc, $1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$.

En appliquant le théorème d'encadrement, on conclut que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 11 ^[**]

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$.

Étudier la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt$.

2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^3}{1+t^3} dt$.

Correction

1. La fonction f est continue sur $[0, 2]$ donc elle admet des primitives sur $[0, 2]$.

Soit F une primitive de f sur $[0, 2]$.

Alors, $\forall x \in [1, 2], \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$.

On reconnaît un taux d'accroissement donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = F'(1) = f(1)$

2. On applique la question 1 à $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^3}$ qui est continue sur $[0, 2]$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^3}{1+t^3} dt = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 ^[**] Soit $R > 0$.

1. Soit D l'aire du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R .

A l'aide d'un dessin, montrer que

$$D = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

2. A l'aide du changement de variable $x = R \sin(u)$, montrer que

$$D = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$$

3. Retrouver le résultat connu.