Chapitre 29 : Intégration d'une fonction continue sur un segment (prof)

Table des matières

1 Notions d'intégrale

1.1 Définition pour une fonction positive

Définition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **positive et continue** sur $[a, b]$.
On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

$\mathcal{D}$ est le domaine délimité par la courbe de f, les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses.
On note également cette quantité $\int_a^b f$.

Exemple 2 Soit $f : x \to 2x + 3$. Déterminer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 3 La lettre t est appelée variable d'intégration. Elles est correctement définie par le symbole $\int$.
Elle est muette et peut-être remplacée par une autre lettre, **non déjà utilisée**.
Elle n'existe plus en dehors de l'intégrale.

1.2 Définition pour une fonction de signe quelconque

Définition 4.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.
On note

$$f_+ : \left\{\begin{array}{l} [a, b] \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(f(x), 0) \end{array}\right. \quad \text{et } f_- : \left\{\begin{array}{l} [a, b] \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(-f(x), 0) \end{array}\right.$$

- f_+ est la partie positive de f et f_- est la partie négative de f.
- $\forall x \in [a, b],\ f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \geq 0$ et $f = f_+ - f_-$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ la quantité défini par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f_+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f_-(t)\mathrm{d}t$$

Définition 5 (Echange des bornes)**.**

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $\underline{a \leq b}$). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.

$$\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2 Méthodes de calculs

2.1 A l'aide d'une primitive

Théorème 6.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit F une primitive de f sur I.
Soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 7 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+5}dx = \big[\ln(x^2+5)\big]_0^1 = \ln(6) - \ln(5) = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$

Exemple 8 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t.$

Remarque 9 Il faut connaître des primitives usuelles.

Exemple 10 Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(t)\mathrm{d}t.$

Exemple 11 Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+t^2}\mathrm{d}t.$

2.2 Intégration par parties

Définition 12.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I}$ lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 13.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 14 Calculer $\displaystyle A = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t.$

Exemple 15 Calculer $\displaystyle A = \int_1^{\mathrm{e}^2} \ln(t)\mathrm{d}t.$

2.3 Changement de variables

Théorème 16.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I.
Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J tel que $\phi(J) \subset I$.
Soit $(a, b) \in J^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Methode 1.

Le changement de variable se passe en 3 étapes :

1. On pose $x = \phi(t)$. (donné dans l'énoncé, sauf dans des cas simples)
2. On "dérive" pour obtenir $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
3. On remplace les bornes, le $\mathrm{d}t$ et le $\phi(t)$.

Exemple 17 Via le changement de variable $u = \mathbf{e}^t$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}}\mathrm{d}t$.

Théorème 18.

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $I = [-a, a]$.

1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Théorème 19.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Règles de calcul

Théorème 20.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a, b]$.
L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :** $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles :** $\forall c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3.2 Intégrales et inégalités

Théorème 21.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a,b]$.
L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Inégalité triangulaire :** $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
2. **Positivité :** Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
3. **Croissance :** Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Exemple 22 Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite u est décroissante.
2. Montrer que la suite u est bornée.
3. En déduire que la suite u est convergente.

Théorème 23.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ **de signe constant**.

1. Si f est strictement positive, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f > 0$.
2. Si f est strictement négative, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f < 0$.
3. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur $[a,b]$.

3.3 Valeur moyenne

Théorème 24.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.
Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$.
Alors,

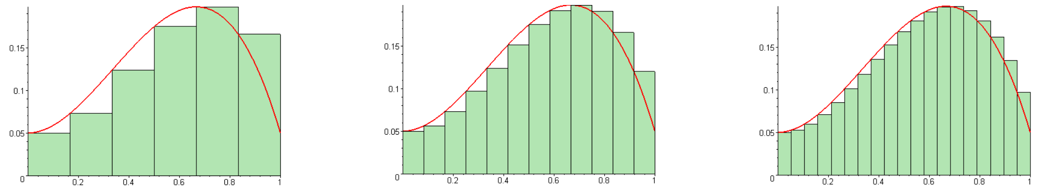
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M(b-a)$$

Plus précisément, $\exists\ c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)$.

La valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.

4 Applications

4.1 Sommes de Riemman



Théorème 25.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 26 (Version générale.)**.**

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 27 Etudier la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

Exemple 28 On s'intéresse à la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n^2-k^2}}$.
Montrer qu'elle converge et exprimer sa limite à l'aide d'une intégrale.

4.2 Valeur approchée d'une intégrale

En voyant l'intégrale comme une limite de suites, on peut approcher la valeur d'une intégrale avec le code suivant.

```python
def rectangle(f,a,b,n):
    S=0
    h=(b-a)/n
    for i in range(n):
        S=S+f(a+i*h)
    return h*S
```

4.3 Fonction définie par une intégrale

Théorème 29 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I.
La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
Autrement dit, F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 30 Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.