Chapitre 30 : Fonctions de deux variables (prof)

Table des matières

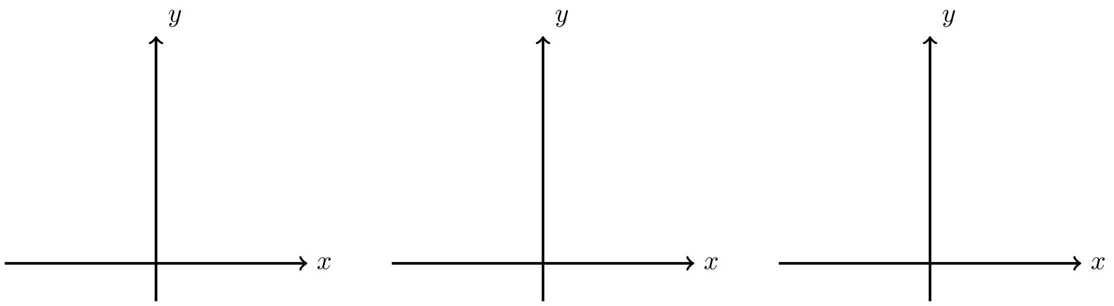
1 Définitions

1.1 Sous−ensembles de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$.

- D est un pavé de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe deux intervalles de $\mathbb{R}$, I et J, tels que
$$D = I \times J$$
Lorsque I et J sont ouverts, on parle de pavé ouvert.
- D est un disque de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe $\Omega(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\right\}$$
- D est un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \geq ax + b\right\} \text{ ou } D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \leq ax + b\right\}$$



1.2 Ensemble de définition et surface.

Définition 2.

On appelle fonction de deux variables réelles toute fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{array} \right.$$

D est l'ensemble de définition de f.

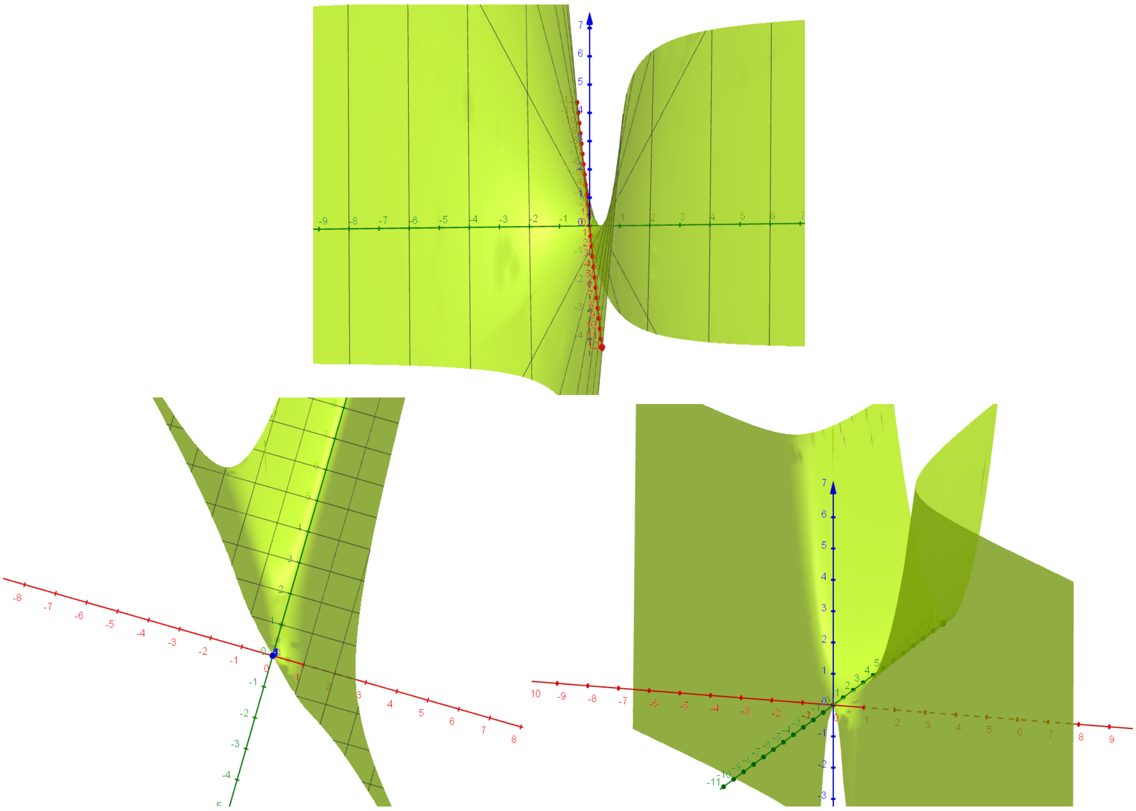
Exemple 3.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $(x, y) \mapsto xy$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{\ln(x)}{y}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 \ln(x + y)$.

Définition 4.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On appelle surface de f l'ensemble $S_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D\}$.
On a aussi $S_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\right\}$.

Exemple 5. Voici les surfaces des fonctions 1 et 3 de l'exemple 3.



Exemple 6. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y + 1$. Déterminer la surface de f.

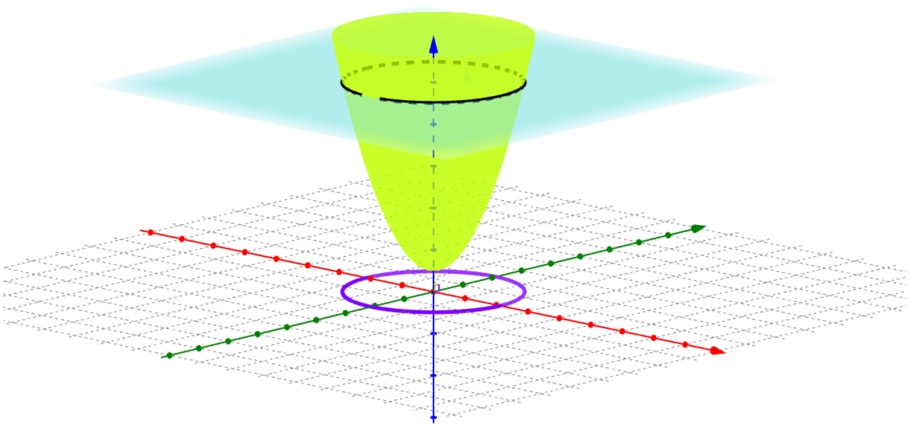
1.3 Courbes de niveau

Définition 7.

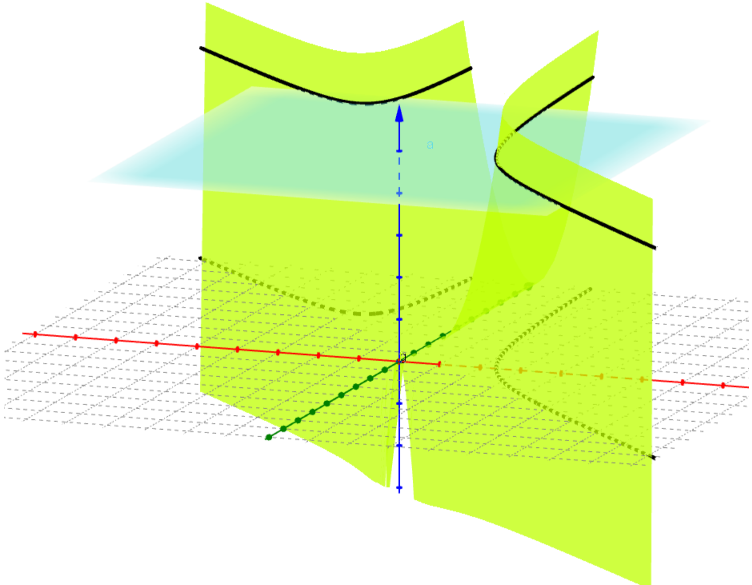
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$.
On appelle courbe de niveau k de f l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$C_k = \{(x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = k\}$$

Exemple 8. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}$.



Exemple 9. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 \ln(x + y)$.



1.4 Fonctions partielles

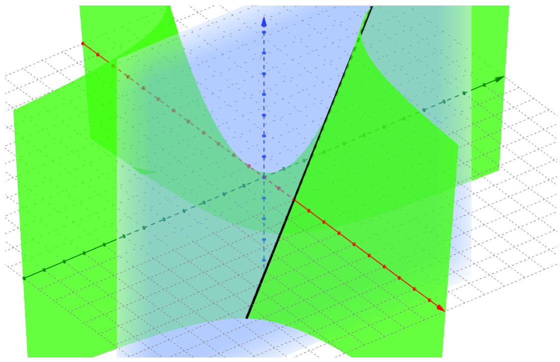
Définition 10.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On appelle fonctions partielles en (x_0, y_0) les fonctions définies par

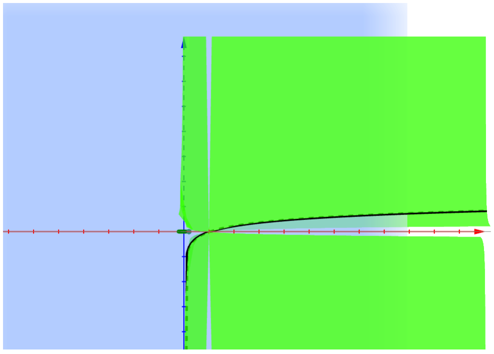
$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0) \text{ et } f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$$

Exemple 11. Retour sur les fonctions de l'exemple 3.

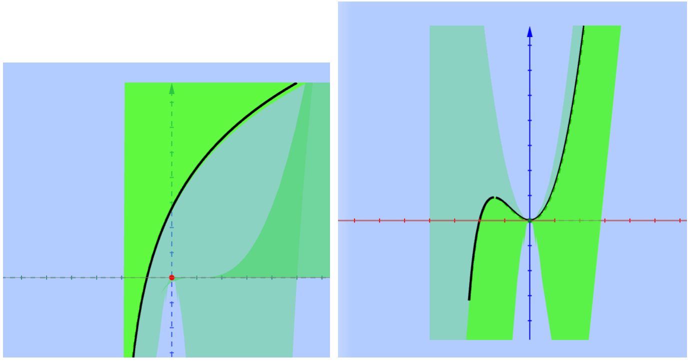
1. Pour $x = 2$,



2. Pour $y = 3$,



3. Pour $x = 2$ puis $y = 3$,



2 Régularité d'une fonction de deux variables

2.1 Continuité

Définition 12.

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f est continue en (x_0, y_0) lorsque
Si $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

2.2 Dérivées partielles en un point et gradient.

Définition 13.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) lorsque la fonction partielle f_{y_0} est dérivable en x_0.
  On appelle dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0, y_0) la quantité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ définie par
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0)$$
- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x_0, y_0) lorsque la fonction partielle f_{x_0} est dérivable en y_0.
  On appelle dérivée partielle de f par rapport à y en (x_0, y_0) la quantité $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ définie par
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0)$$

On dit que f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) lorsque les deux conditions sont vérifiées.

Remarque 14. Le symbole ∂ se lit *dé rond*.

Exemple 15. Retour sur les fonctions de l'exemple 3.

Définition 16.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On suppose que f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0).
On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Exemple 17. Soient $n \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}$ fixés. Soit $f : (T, V) \mapsto nR\dfrac{T}{V}$.
Déterminer le domaine de définition de f puis le gradient de f en $(1, 3)$.

Définition 18.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point de D.

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à x la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ définie par

$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_y(x)$$

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à y la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ définie par

$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_x(y)$$

On dit que f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) lorsque les deux conditions sont vérifiées.

Remarque 19. Les dérivées partielles sont également des fonctions de deux variables.

Théorème 20 (Opérations sur les dérivées partielles)**.**

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tous les points de D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $f + \lambda g$ admet des dérivées partielles en tous les points de D et

$$\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda.\frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda.\frac{\partial g}{\partial y}$$

2. La fonction fg admet des dérivées partielles en tous les points de D et

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial (fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial y}$$

Théorème 21 ("Composée").

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tous les points de D.
Soit $f : \mathbb{R} \to I$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $F : (x,)y \mapsto g[f(x, y)$ est définie sur D et admet des dérivées partielles en tous les points de D données par

$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).g'[f(x, y)]$$
$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).g'[f(x, y)]$$

Exemple 22. Soit $F : (x, y) \mapsto \exp(\arctan(x^2 + 3y))$.
Montrer que F admet des dérivées partielles en tous les points de son ensemble de définition et les déterminer.

Définition 23.

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D lorsque

- Les fonctions partielles f_x et f_y sont dérivables,
- Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D.

2.3 Points critiques

Définition 24.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exemple 25. Trouver les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

Théorème 26.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction f atteint son maximum et son minimum en des points critiques ou au bord du pavé.

Exemple 27. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
Déterminer les extrema de f sur $[0, 3] \times [1, 5]$.

3 Dérivées partielles d'ordre deux

3.1 Définitions

Définition 28.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
On définit, lorsqu'elles existent, les dérivées d'ordre deux en (x_0, y_0) par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$$

Définition 29.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D lorsque les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent et sont continues sur D.

Exemple 30. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.
Calculer les dérivées partielles d'ordre deux en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

3.2 Théorème de Schwarz

Théorème 31.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

$$\forall (x_0,y_0) \in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

Exemple 32. Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$.