

Exercice 1 Déterminer les lignes de niveau (et les tracer) de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases}$$

Exercice 2 Pour les fonctions suivantes, donner leur ensemble de définition et montrer qu'elles ne sont pas continues en $(0, 0)$.

1. Soit f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
2. Soit f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Exercice 3 On admet que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition (à préciser). Déterminer leurs dérivées partielles :

1. $f : (x, y) \mapsto 3x^2x + 2x \sin(x - 2y)$
2. $g : (x, y) \mapsto \frac{2x^3}{x + y} + 3y$
3. $h : (x, y) \mapsto y \ln(2 - x)$

Exercice 4 Déterminer les extrema de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 \end{cases}$$

Exercice 5 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

1. Déterminer les dérivées partielles de f .
2. Donner la définition d'un minimum et maximum.
3. Montrer que f ne peut admettre un extremum qu'en un seul point.
4. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)$. f admet-elle un extremum local ?

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Soit $F : t \mapsto f(t^2, t + 2)$. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer F' .

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x + 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + y \end{cases}$$