BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 8

— 25 mai 2022—

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^2 \ln^n(t)$ est continue sur le segment $[1, \mathbf{e}]$ donc $\underline{I_n \text{ existe}}$.

2. $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} t^2 \ln(t) \mathrm{d}t$.

   On pose $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = t^2 \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right.$ On a donc $\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathbf{e}]$ donc, par le théorème de l'intégration par parties,

$$I_1 = \left[\frac{t^3 \ln(t)}{3}\right]_1^{\mathbf{e}} - \int_1^{\mathbf{e}} \frac{t^2}{3} \mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathbf{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

   Donc, $\boxed{I_1 = \dfrac{1 + 2\mathbf{e}^3}{9}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall t \in [1, \mathbf{e}],\ 0 \leq \ln(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \ln^{n+1}(t) \leq \ln^n(t) \Rightarrow 0 \leq t^2 \ln^{n+1}(t) \leq t^2 \ln^n(t)$ (On a multiplié par $\ln^n t \geqslant 0$ et par $t^2 \geqslant 0$)
   Par croissance de l'intégrale, $\boxed{0 \leq I_{n+1} \leq I_n}$.

4. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc, par le théorème de la limite monotone, $\underline{\text{elle converge}}$.
   $\forall t \in [1, \mathbf{e}],\ 0 \leq \ln^n(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \ln^n(t) \leq t^2$
   Par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} t^2 \mathrm{d}t \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\mathbf{e}^3 - 1}{3}$.

   Par passage à la limite, $\boxed{0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq \dfrac{\mathbf{e}^3 - 1}{3}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On pose $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = t^2 \\ v(t) = \ln^{n+1}(t) \end{array} \right.$ On a donc $\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ v'(t) = \dfrac{(n+1)\ln^n(t)}{t} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathbf{e}]$ donc, par le théorème de l'intégration par parties,

$$I_{n+1} = \left[\frac{t^3 \ln^{n+1}(t)}{3}\right]_1^{\mathbf{e}} - \int_1^{\mathbf{e}} \frac{(n+1)t^2 \ln^n(t)}{3} \mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

   Donc, $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{\mathbf{e}^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n}$.

6. Supposons, par l'absurde, que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \neq 0$. Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) I_n = \infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3}\right) = \infty$.

   Or, par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3} = \dfrac{\mathbf{e}^3}{3}$.

   Donc, la suite $\left(I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Donc, sa limite ne peut pas être infinie.

   D'où, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

   On a donc que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$.

   Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{3}{n+1}\left(\dfrac{\mathbf{e}^3}{3} - I_{n+1}\right)$ donc $I_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n+1} - o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. Donc, $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n+1}$.

   Finalement, $\boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n}}$.

Exercice 2.

Partie I

1. Le calcul des puissances de M donne $M^2 \neq O_3$ et $M^3 = O_3$.
   Puisque f^2 et f^3 sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés respectivement à M^2 et M^3, on en déduit que $f^2 \neq O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est nilpotent d'indice } 3}$.

2. $\ker f$ est l'ensemble des solutions du système :
$$S : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ -14x - 4y - 10z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right.$$
   En résolvant le système par le pivot de Gauss, on trouve
$$S \iff \left\{ \begin{array}{c} 2x + +y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array} \right.$$
   Ainsi, $\ker f = \{(-z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 1, 1), z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((-1, 1, 1))$.
   La famille $((-1, 1, 1))$ est génératrice de $\ker f$ par définition. C'est une famille libre car elle est composée d'un unique vecteur non-nul.
   $\boxed{\text{Donc } ((-1, 1, 1)) \text{ est une base de } \ker f. \text{ On en déduit } \dim \ker f = 1}$

3. D'après le théorème du rang, $\dim \ker f + \text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3$. $\boxed{\text{On en déduit rg } f = 2}$.

4. On trouve : $u = (0, 1, 0)$. $\boxed{v = (1, -4, 0)}$ (c'est le 2ème vecteur colonne de la matrice M) et $\boxed{w = (-2, 2, 2)}$.

5. On pose $\mathcal{B} = (u, v, w)$. Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre :
   Soient x, y, $z \in \mathbb{R}$ fixés quelconques.
$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{ \begin{array}{r} y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$
   On en déduit que $\mathcal{B}$ est libre.
   Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. De plus, son cardinal vaut 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
   La matrice de f dans cette base est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 00 & \end{pmatrix}$$

Partie II

1. Par hypothèse, f^{p-1} n'est pas l'application nulle. Ne pas être égal à $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ signifie, pour un endomorphisme, qu'il existe au moins un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ qui a une image non nulle par ce morphisme. Ainsi,
$$\exists u \in \mathbb{R}^3, \ f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$
   Par ailleurs, $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$; donc $f^p(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

2. Tout d'abord, on peut remarquer que, pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, $f^j(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. En effet, dans le cas contraire, cela entrainerait nécessairement que $f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$; ce qui contredit la construction de la question précédente.
   Montrons maintenant que la famille est libre. Pour cela, on introduit p scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ tels que
$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j f^j(u) = 0_{\mathbb{R}^3}; \text{ i.e. } \lambda_0 u + \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
   - On compose par f^{p-1} cette égalité. Par linéarité, on obtient :
$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j f^{j+p-1}(u) = f^{p-1}(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
     Si $j + p - 1$ est supérieur ou égal à p, le vecteur $f^{j+p-1}(u)$ est nul car f est un endomorphisme nilpotent d'ordre p. Ainsi, il ne reste qu'un seul terme dans la somme : $\lambda_0 f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or, $f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ par construction ; donc le coefficient λ_0 est nécessairement nul.

- L'égalité initale s'écrit maintenant

$$\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f^j(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

En la composant par f^{p-2}, on montre que $\lambda_1 = 0$.
- De proche en proche, en composant par f^{p-1-k}, on montre que λ_k est nul, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{la famille } \left(f^k(u)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \text{ est une libre.}}$

3. On travaille ici dans $\mathbb{R}^3$; d'après le théorème de la base incomplète, on sait que la cardinal d'une famille libre ne peut dépasser 3. La famille libre trouvée dans la question précédente est de cardinal p. Donc $\boxed{p \leqslant 3.}$

4. (a) Toujours avec le théorème de la base incomplète, sachant que le cardinal de la famille libre $(u, f(u), f^2(u))$ vaut $\dim R^3$, on conclut que $\boxed{\text{cette famille est une base de } \mathbb{R}^3.}$

   (b) Il est alors assez facile de voir que $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans cette base est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

   D'autre part, cette matrice est échelonnée ; son rang vaut 2. $\boxed{\text{Le rang de } f \text{ vaut donc aussi 2.}}$

5. (a) Soit $v \in \operatorname{Im} f$. Appartenir à l'image de f signifie admettre un antécédent par f. Ainsi, il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = v$. On calcule maintenant $f(v)$:

$$f(v) = f(f(w)) = f \circ f(w) = f^2(w) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

   Donc, v appartient au noyau de f. $\boxed{\text{En conclusion, } \operatorname{Im} f \subset \ker f.}$

   Cette inclusion nous permet d'affirmer que $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \ker f$. Par ailleurs, le théorème du rang stipule que $\operatorname{rg} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. En rassemblant les deux informations, on trouve

$$2 \dim \ker f \geqslant 3; \text{c'est-à-dire } \dim \ker f \geqslant \frac{3}{2}.$$

   Enfin, comme une dimension est forcément entière, on trouve $\boxed{\dim \ker f \geqslant 2.}$

   (b) Il reste deux possibilités pour la dimension du noyau : 2 ou 3 (car on travaille dans $\mathbb{R}^3$). On peut éliminer la dernière alternative car cela signifierait que f est l'application nulle, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\boxed{\dim \ker f = 2.}$

   (c) Le vecteur $f(u)$ appartient à l'image de f, donc d'après la question 5a, $\boxed{f(u) \in \ker f.}$

   Par ailleurs, ce vecteur est non nul par construction, il forme donc une famille libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base du noyau de f. Comme ce dernier est de dimension 2, il suffit donc de rajouter un vecteur.

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe } v \in \ker f \text{ tel que } (f(u), v) \text{ soit une base de } f.}$

   (d) Comme la famille $(u, f(u), v)$ est de cardinal 3, il suffit de prouver qu'elle est libre pour conclure que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient α, β et γ tels que $\alpha u + \beta f(u) + \gamma v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Supposons α non nul. Alors

$$u = \frac{1}{\alpha}(\beta f(u) + \gamma v).$$

   Le vecteur u s'écrirait donc comme une combinaison linéaire de deux vecteurs du noyau ; or ce noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc u appartiendrait à $\ker f$. Ce qui est absurde, donc $\alpha = 0$.
   On obtient ainsi $\beta f(u) + \gamma v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or la famille $(f(u), v)$ est libre par construction ; donc $\beta = \gamma = 0$.

   La famille $(u, f(u), v)$ est donc libre et par suite, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$

   (e) $\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans cette base est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et le rang de } f \text{ vaut donc 1.}}$

6. $\boxed{\text{Si } p = 1, \text{ l'application } f \text{ est nulle.}}$