

# Chapitre 01 : Nombres réels (prof)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Quantificateurs.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Identités remarquables.</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Fonctions puissances et racines</b>	<b>2</b>
3.1	Fonctions puissances . . . . .	2
3.2	Racines carrées . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Manipulation d'inégalités.</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Résolutions d'équations et d'inéquations.</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Valeur absolue.</b>	<b>6</b>
6.1	Définition . . . . .	6
6.2	Equations et inéquations avec la valeur absolue . . . . .	6
6.3	Inégalités triangulaires . . . . .	7
<b>7</b>	<b>Partie entière.</b>	<b>7</b>

# 1 Quantificateurs.

## Définition 1.

Le quantificateur  $\in$  traduit l'appartenance d'un élément à un ensemble.

## Définition 2.

Le quantificateur universel  $\forall$  signifie pour tout.

**Exemple 3.** La proposition « Tous les carrés de nombres réels sont positifs » s'écrit avec les quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

# 2 Identités remarquables.

## Théorème 4.

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

**Démonstration :** Pour chacune des expressions, on développe le produit et on obtient l'autre expression. ■

**Exemple 5.** Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x - y)^2$$

La dernière inégalité est vraie donc la première aussi.

**Exemple 6.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Factoriser  $a^3 + 1$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$a^3 + 1 = a^3 - (-1)^3 = (a - (-1))(a^2 - a + (-1)^2) = (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

# 3 Fonctions puissances et racines

## 3.1 Fonctions puissances

### Définition 7.

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

Pour  $n$  positif, on appelle puissance  $n$ -ième de  $x$  le réel  $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^n x$ .

Pour  $n$  négatif, on appelle puissance  $n$ -ième de  $x$  le réel  $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ .

**Théorème 8** (Règles de calculs).

Soient  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$  et  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ .

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^{n+m} = x^m \cdot x^n, \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

**3.2 Racines carrées****Définition 9.**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

On appelle racine carrée de  $x$  l'unique réel **positif**  $a$  tel que  $a^2 = x$ .

On note  $a = \sqrt{x}$ .

**Théorème 10** (Règles de calculs).

Soient  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

**4 Manipulation d'inégalités.****Théorème 11.**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Additionner ou soustraire la même quantité aux deux membres d'une inégalité conserve le sens de l'inégalité.

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

2. Multiplier une inégalité par une quantité strictement positive conserve le sens de l'inégalité

$$\forall z \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$$

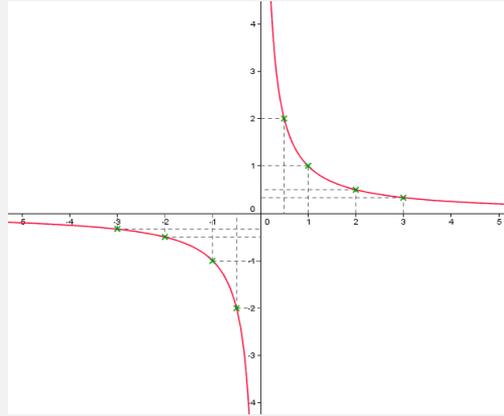
3. Multiplier une inégalité par une quantité strictement négative change le sens de l'inégalité

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \quad x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$$

**Théorème 12.**

Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$  deux réels non nuls.

- Si  $0 < x < y$  alors  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ .
- Si  $x < y < 0$  alors  $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$ .
- Si  $x < 0 < y$  alors  $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$ .

**Théorème 13.**

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

1. On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.

$$x \leq y \text{ et } z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$$

2. On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs**.

$$0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq z \leq t \Rightarrow xz \leq yt$$

**Démonstration :**

1. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $x \leq y$  et  $z \leq t$ .  
 $\Rightarrow x + z \leq y + z$  et  $y + z \leq y + t$ .  
 $\Rightarrow x + z \leq y + t$  par transitivité.
2. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $0 \leq x \leq y$  et  $0 \leq z \leq t$ .  
 $\Rightarrow xz \leq yz$  et  $yz \leq yt$ .  
 $\Rightarrow xz \leq yt$  par transitivité. ■

## 5 Résolutions d'équations et d'inéquations.

**Théorème 14.**

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  avec  $a \neq 0$ . On note  $(E)$  l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

1. (a) Si  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  alors l'équation admet 2 solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- (b) Si  $\Delta < 0$  alors il n'y a aucune solution réelle.

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ .

2. La courbe de  $f$  est une parabole dont le maximum est atteint en  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .
3. Le signe de  $f$  est celui de  $-a$  entre les racines et celui de  $a$  à l'extérieur des racines.

**Démonstration :**

On utilise la forme factorisée de l'expression  $ax^2 + bx + c$ .

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

1. (a) Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  alors  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$  donc  $\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) > 0$ .

Le polynôme ne s'annule jamais.

- (b) Si  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  alors  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$  donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= a \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \end{aligned}$$

Les solutions de  $ax^2 + bx + c = 0$  sont donc  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

2. Le maximum est atteint là où la dérivée s'annule.

3. On repart de la forme factorisée.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si  $x \in [x_1; x_2]$  alors  $x - x_1 \geq 0$  et  $x - x_2 \leq 0$  donc  $f(x)$  est du signe de  $-a$ .

Sinon,  $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$  donc  $f(x)$  est du signe de  $a$ . ■

**Exemple 15.** Résoudre l'inéquation  $-x^2 + 4x < 4$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$-x^2 + 4x < 4 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^0 > 0$$

Donc l'inégalité est tout le temps vraie.

**Exemple 16.** Résoudre l'inéquation  $\frac{3}{x} \leq x + 2$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x(x + 2) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)(x + 3)$$

Or, le polynôme  $x^2 + 2x - 3$  est positif en dehors des racines donc

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \text{ ET } x > 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Soit  $x \in \mathbb{R}_-^*$ .

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \Leftrightarrow 3 \geq x(x + 2) \Leftrightarrow 0 \geq x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow 0 \geq (x - 1)(x + 3)$$

Or, le polynôme  $x^2 + 2x - 3$  est négatif en dehors des racines donc

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \text{ ET } x < 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 0]$$

Finalement,  $S = [-3; 0] \cup [1; +\infty[$

**Exemple 17.** On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 1$  et la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ . Déterminer le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{P}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 &\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \text{ ou } x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

Donc  $S = \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$ .

## 6 Valeur absolue.

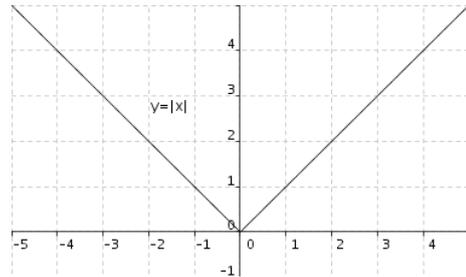
### 6.1 Définition

#### Définition 18.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On appelle la valeur absolue de  $x$  le nombre réel, noté  $|x|$ , défini par

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



#### Théorème 19.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. **Positivité** :  $|x| \geq 0$ .
2. **Compatibilité avec le produit** :  $|xy| = |x||y|$  et  $|x^n| = |x|^n$ .
3. **Compatibilité avec le quotient** : Si  $y \neq 0$  alors  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

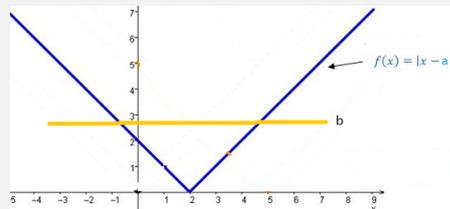
**Remarque 20.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Le réel  $|x|$  représente la distance entre  $x$  et 0.

### 6.2 Equations et inéquations avec la valeur absolue

#### Théorème 21.

Soit  $(x, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ .

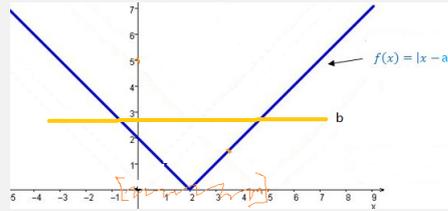
1.  $|x| = b \Leftrightarrow x = b$  ou  $x = -b$ .
2.  $|x - a| = b \Leftrightarrow x = a + b$  ou  $x = a - b$ .



**Théorème 22.**

Soit  $(x, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ .

1.  $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$ .
2.  $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$ .

**6.3 Inégalités triangulaires****Théorème 23 (Inégalité triangulaire).**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

**Démonstration :** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} (|x + y|)^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ (|x| + |y|)^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \end{aligned}$$

Or,  $xy \leq |xy|$  donc  $(|x + y|)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ .

Par passage à la racine carrée, on retrouve l'inégalité souhaitée. ■

**Théorème 24.**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

**Démonstration :** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} |x| &= |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| \\ &\leq |x + y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} |y| &= |y + x - x| \leq |y + x| + |-x| \\ &\leq |x + y| + |x| \\ |y| - |x| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

Finalement,  $||x| - |y|| \leq |x + y|$ . ■

**7 Partie entière.****Définition 25.**

Soit  $x$  un nombre réel. On appelle partie entière de  $x$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . On la note  $\lfloor x \rfloor$ .

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$$

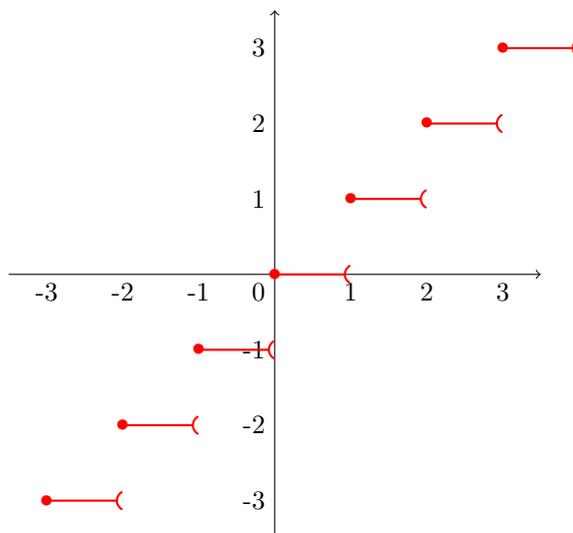
**Exemple 26.**  $E(e) = 2$ ,  $E(-\pi) = -4$ .

**Théorème 27.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$$

**Remarque 28.** La fonction partie entière est définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Elle est croissante sur  $\mathbb{R}$ .



**Théorème 29.**

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

1.  $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = [x]$ .
2.  $[x + n] = [x] + n$ .

**Remarque 30.** Le deuxième point est faux dans le cas général.