Exercice 1. Calculer les fractions suivantes.

1. $\dfrac{-12}{5} \div \left(\dfrac{-6}{5}\right)$
2. $\dfrac{3^{21}+3^{22}}{3^{33}-3^{30}}$
3. $\dfrac{5!}{2!3!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
4. $\dfrac{2022}{(-2022)^2+(-2021)(2023)}$
5. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$

1. $\dfrac{-12}{5} \div \left(\dfrac{-6}{5}\right) = \dfrac{-12}{5} \times \dfrac{5}{-6} = \dfrac{-12 \times 5}{5 \times (-6)} = 2$
2. $\dfrac{3^{21}+3^{22}}{3^{33}-3^{30}} = \dfrac{3^{21}(1+3)}{3^{30}(3^3-1)} = \dfrac{4 \times 3^{21}}{26 \times 3^{30}} = \dfrac{2}{13 \times 3^9}$.
3. $\dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 2 \times 3} = 10$
4. $\dfrac{2022}{(-2022)^2+(-2021)(2023)} = \dfrac{2022}{(-2022)^2+(1-2022)(1+2022)} = \dfrac{2022}{2022^2+1-2022^2} = 2022$.
5. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \dfrac{25 \times 2}{(1+\sqrt{3})^2} = \dfrac{50}{1+2\sqrt{3}+3} = \dfrac{25}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{25(2-\sqrt{3})}{4-3} = 25(2-\sqrt{3})$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n}\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Exercice 2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(2x+1)^2 = (2x+1)(x-3)$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 = (2x+1)(x-3) &\Leftrightarrow (2x+1)[(2x+1)-(x-3)] = 0\\ &\Leftrightarrow (2x+1)(x+4) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -4\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}}$

2. $36x^2 - 49 - (6x+7)(6x-1) = 0$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}36x^2 - 49 - (6x+7)(6x-1) = 0 &\Leftrightarrow (6x-7)(6x+7) - (6x+7)(6x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow (6x+7)[(6x-7)-(6x-1)] = 0\\ &\Leftrightarrow (6x+7) \times (-6) = 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7}{6}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{7}{6}\right\}}$

3. $(-9x-8)(8x+8) = 64x^2 - 64$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(-9x-8)(8x+8) = 64x^2 - 64 &\Leftrightarrow (-9x-8)(8x+8) - (8x-8)(8x+8)\\ &\Leftrightarrow (8x+8)[(-9x-8)-(8x-8)] = 0\\ &\Leftrightarrow (8x+8)(-17x) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \{-1, 0\}}$

4. $4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2x - 7 \geq 0$$

$2x^2 + 2x - 7$ est un polynôme de degré 2 dont les racines donc $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{60}}{4} = \dfrac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{60}}{4} = \dfrac{-1 - \sqrt{15}}{2}$.

On sait que ce polynôme est du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines donc

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}, +\infty\right[$$

Donc $\boxed{S = \left]-\infty, \dfrac{-1 - \sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1 + \sqrt{15}}{2}, +\infty\right[}$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$(1 + a)^n \geq 1 + na$".

I : Pour $n = 0$,
$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \times (1 + a) &\geq (1 + na)(1 + a) \\ &\geq 1 + na + a + na^2 \end{aligned}$$

Or, $na^2 \geq 0$ donc $(1 + a)^{n+1} \geq (n + 1)a$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

C : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, développer ou factoriser les expressions suivantes

1. $(a + 2)^3$
2. $a^4 - 1$
3. $\sqrt{(-a)^2}$
4. $\sqrt{(3 - a)^2}$

1. $(a + 2)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2 + 3 \times a \times 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$.
2. $a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$.
3. $\sqrt{(-a)^2} = |-a| = |a|$.
4. $\sqrt{(3 - a)^2} = |3 - a|$

Exercice 5. [*] Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On va démontrer chacune des inégalités séparément.

- $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
- $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{\sqrt{ab}} + \dfrac{1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{b+a}{ab} \geq \dfrac{2}{\sqrt{ab}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{\sqrt{ab}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

Exercice 6. *Introduction aux complexes*
Soit $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i}^2 = -1$. Calculer les expressions suivantes.

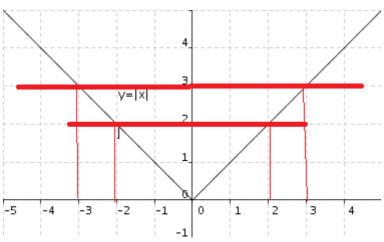
1. $\mathbf{i}^3$
2. $(-\mathbf{i})^4$
3. $(1+\mathbf{i})^2$
4. $(4-5\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})$
5. $\dfrac{4-5\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}$

1. $\mathbf{i}^3 = \mathbf{i} \times \mathbf{i}^2 = -\mathbf{i}$.
2. $(-\mathbf{i})^4 = \mathbf{i}^4 = (\mathbf{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$.
3. $(1+\mathbf{i})^2 = 1 + 2\mathbf{i} + (\mathbf{i})2 = 1 + 2\mathbf{i} - 1 = 2\mathbf{i}$.
4. $(4-5\mathbf{i})(3+4\mathbf{i}) = 12 + 16\mathbf{i} - 15\mathbf{i} - 20\mathbf{i}^2 = 12 + \mathbf{i} + 20 = 32 + \mathbf{i}$.
5. $\dfrac{4-5\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}} = \dfrac{(4-5\mathbf{i})(3-4\mathbf{i})}{9-16\mathbf{i}^2} = \dfrac{12-16\mathbf{i}-15\mathbf{i}+20\mathbf{i}^2}{25} = \dfrac{-8-31\mathbf{i}}{25}$.

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x+2| = 5$
3. $|3-x| = x+1$
4. $|x| \leq 3$
5. $|x-3| \leq 4$
6. $2 < |x+1| < 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Donc, $\boxed{S = \{-2, 2\}}$.
2. $|x+2| = 5 \Leftrightarrow x+2 = 5$ ou $x+2 = -5 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -7$. Donc, $\boxed{S = \{-7, 3\}}$.
3. Si $x+1 < 0$, cette équation n'a pas de solution.
   On suppose $x \geq -1$.
   $$\begin{aligned} |3-x| = x+1 &\Leftrightarrow 3-x = x+1 \text{ ou } x-3 = x+1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$
   Donc, $\boxed{S = \{1\}}$
4. $|x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3]$. Donc, $\boxed{S = [-3, 3]}$
5. $|x-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-1, 7]$. Donc, $\boxed{S = [-1, 7]}$
6. 

   $$2 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow 2 < x+1 < 3 \text{ ou } -3 < x+1 < -2 \Leftrightarrow x \in [-4, -3] \cup [1, 2]$$
   Donc, $\boxed{S = [-4, -3] \cup [1, 2]}$

Exercice 8. Donner des exemples de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $x \neq y$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
   $\lfloor 0,3 \rfloor = \lfloor 0,7 \rfloor$ ou $\lfloor -2,3 \rfloor = \lfloor -2,8 \rfloor$.
2. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
   $\lfloor 1,2 + 0,5 \rfloor = \lfloor 1,2 \rfloor$.
3. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
   $\lfloor 1,4 + 1,5 \rfloor = \lfloor 1,4 \rfloor + \lfloor 1,5 \rfloor$.
4. $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
   $\lfloor 2,6 + 1,6 \rfloor = 4$ et $\lfloor 2,6 \rfloor + \lfloor 1,6 \rfloor = 3$.

Exercice 9. [*] Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$.
  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur à $x+y$ et $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
- On a $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$.
  De plus, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
  On a donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
  Or, ce sont des entiers donc $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1[,\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   Soit $x \in [0, 1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$.
   De plus, $0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$. Donc $0 \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < 1$
   Donc, pour $x \in [0, 1[$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$.
   On a bien $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

2. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x + 1 \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} h(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1) \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

   La fonction h est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

   La fonction h est nulle sur $[0, 1[$ et elle est $1-$périodique. Elle est nulle sur $\mathbb{R}$ et on obtient l'égalité souhaitée.