

Exercice 1. Calculer les fractions suivantes.

1. $\frac{-12}{5} \div \left(\frac{-6}{5}\right)$
2. $\frac{3^{21} + 3^{22}}{3^{33} - 3^{30}}$
3. $\frac{5!}{2!3!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.
4. $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$
5. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(x - 3)$
2. $36x^2 - 49 - (6x + 7)(6x - 1) = 0$
3. $(-9x - 8)(8x + 8) = 64x^2 - 64$
4. $4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, développer ou factoriser les expressions suivantes

1. $(a + 2)^3$
2. $a^4 - 1$
3. $\sqrt{(-a)^2}$
4. $\sqrt{(3 - a)^2}$

Exercice 5. [*] Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Exercice 6. *Introduction aux complexes*

Soit \mathbf{i} tel que $\mathbf{i}^2 = -1$. Calculer les expressions suivantes.

1. \mathbf{i}^3
2. $(-\mathbf{i})^4$
3. $(1 + \mathbf{i})^2$
4. $(4 - 5\mathbf{i})(3 + 4\mathbf{i})$
5. $\frac{4 - 5\mathbf{i}}{3 + 4\mathbf{i}}$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x + 2| = 5$
3. $|3 - x| = x + 1$
4. $|x| \leq 3$
5. $|x - 3| \leq 4$
6. $2 < |x + 1| < 3$

Exercice 8. Donner des exemples de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $x \neq y$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
2. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
3. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
4. $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Exercice 9. [*] Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$