2 septembre 2025 : Calculs et Récurrence.

1 Calculs.

Feuilles 1, 2, 4, 6, 7 et 10 du cahier de calculs.

2 Systèmes.

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

1. $(S_1) : \begin{cases} a_1 + a_2 & = & 0 \\ a_1 + a_3 & = & 0 \\ a_1 - 3a_2 + 2a_3 & = & 2 \\ 3a_1 + 2a_3 & = & 1 \end{cases}$

2. $(S_2) : \begin{cases} \alpha + \beta + \Omega & = & 0 \\ 2\alpha + \delta - \Omega & = & 1 \\ -2\alpha - 2\delta - 2\Omega & = & 0 \\ -\alpha + \gamma & = & 0 \\ -\alpha - \beta & = & 0 \end{cases}$

3 Récurrence.

3.1 Principe.

Théorème 1.

Soit P une proposition mathématique définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie.
- pour tous les entiers $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie aussi.

Alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tous les entiers.

3.2 Exercices.

Exercice 2. *Suite arithmético-géométrique.*
On considère une suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 8$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = 3 \times 5^n - 2$.

Exercice 3.
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.
Démontrer que, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 4.
Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, 4 divise $5^n - 1$.

Exercice 5.
Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 6.
Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.