Chapitre 02 : Trigonométrie (prof)

Table des matières

1 Le cercle trigonométrique.

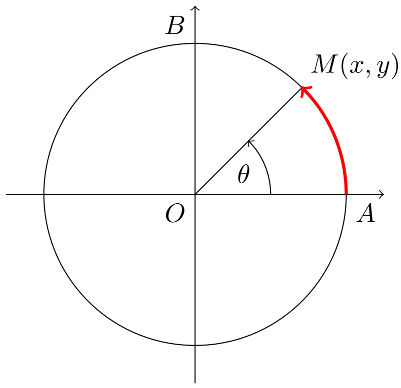
Définition 1.

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

On considère un repère orthonormé (O, A, B).
Soit $(x,y) \in \mathcal{C}(0,1)$. Pour le point M de coordonnées (x,y), on définit l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ comme la longueur *algébrique* de l'arc de cercle entre A et M.

Les angles sont exprimés en radians.



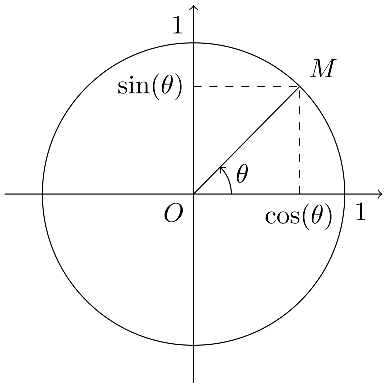
Remarque 2. Pour mesurer un angle, on enroule sur le cercle une corde et on mesure la longueur nécessaire pour parcourir l'angle.

2 Fonctions cosinus et sinus.

2.1 Définition.

Définition 3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ.
On appelle cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, l'abscisse du point M.
On appelle sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, l'ordonnée du point M.



2.2 Propriétés.

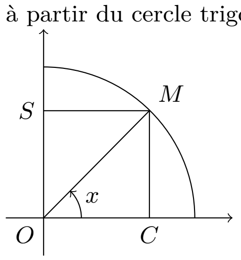
Théorème 4 (Théorème de Pythagore)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer le théorème de Pythagore à partir du cercle trigonométrique.

La triangle OMC est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore,

$$OC^2 + CM^2 = OM^2$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$



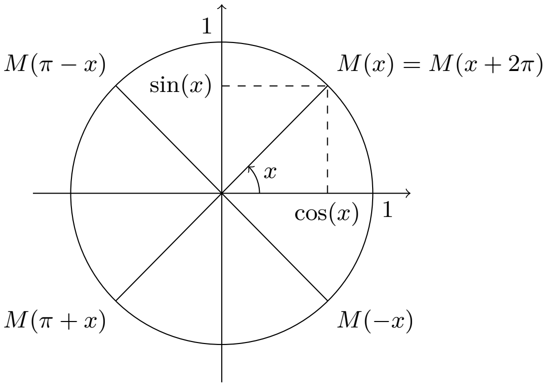
■

Théorème 5.

1. La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$$
2. La fonction cosinus est $2\pi-$périodique :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
3. La fonction cosinus est paire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M(x+2\pi)$ sont situés au même endroit sur le cercle.
- Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi+x)$ sont symétriques par rapport à l'origine.



■

Théorème 6.

1. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x) \leq 1$$
2. La fonction sinus est $2\pi-$périodique :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
3. La fonction sinus est impaire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

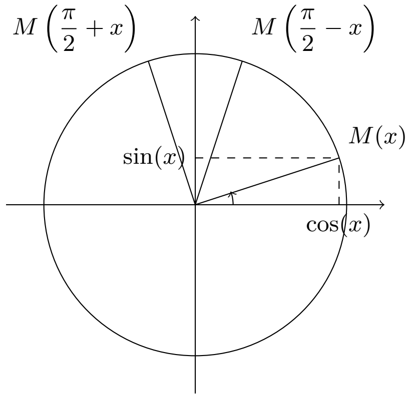
Démonstration : C'est le même raisonnement que le théorème précédent. ■

Théorème 7.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Les points $M\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



■

2.3 Formules d'addition.

Théorème 8.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
2. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
3. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.
4. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration : On démontre la première égalité en utilisant le produit scalaire. ■

Théorème 9 (Formule de l'angle double)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
   On utilise ensuite $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
   Finalement, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$. ■

2.4 Recherche de la phase.

Exemple 10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une autre expression de $G = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$.

On va utiliser la formule $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$$\begin{array}{rcl} G & = & \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) \\ & = & 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) \\ & = & 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta)\right) \\ & = & 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

Exemple 11. Simplifier l'équation $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\right) \\
&= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

L'équation devient donc $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

On peut ensuite résoudre cette équation.

$$\begin{aligned}
2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{6} = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi
\end{aligned}$$

2.5 Formules de linéarisation.

Théorème 12.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
2. $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Démonstration : On repart du théorème précédent.

1. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
2. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$. ■

Exemple 13. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule reliant $\cos(2\theta)$ et $\sin^2(\theta)$.
   $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
2. En déduire une expression de $\sin^2(\theta)$.
   On en déduit que $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.
3. Déterminer $\sin\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$.

   On applique la formule précédente à $\theta = \dfrac{9\pi}{8}$. Donc, $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.
   Or, $\pi \leq \dfrac{9\pi}{8} \leq \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\sin\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) < 0$ donc $\sin\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = -\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.
4. En déduire $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$.
   $\cos^2\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = 1 - \sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = 1 - \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$.
   Or, $\pi \leq \dfrac{9\pi}{8} \leq \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) < 0$ donc $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = -\sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Théorème 14.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)$.
2. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a-b)+\sin(a+b)\big)$.

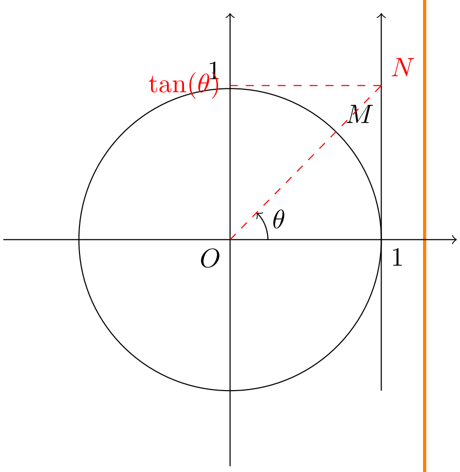
Démonstration : On utilise les formules du théorème 18. ∎

3 Fonction tangente.

3.1 Définition.

Définition 15.

Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ.
On note N le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.
On appelle tangente de θ, noté $\tan(\theta)$, l'ordonnée du point N.



3.2 Propriétés.

Théorème 16.

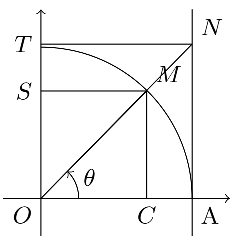
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration : On va appliquer le théorème de Thalès à partir du cercle trigonométrique.

- Les points O, C et A et O, M et N sont alignés dans le même sens.
- Les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AN}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\theta)}{1} = \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)}$$
$$\Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$



∎

Théorème 17.

1. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction tangente est $\pi-$périodique :
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(x+\pi)=\tan(x)$$
3. La fonction tangente est impaire :
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(-x)=-\tan(x)$$
4. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(x+\pi)=\tan(x)$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(\pi-x)=-\tan(x)$.
6. $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}$.

Démonstration : On utilise les propriétés similaires de cosinus et sinus. ■

3.3 Formules d'addition et de linéarisation.

Théorème 18.

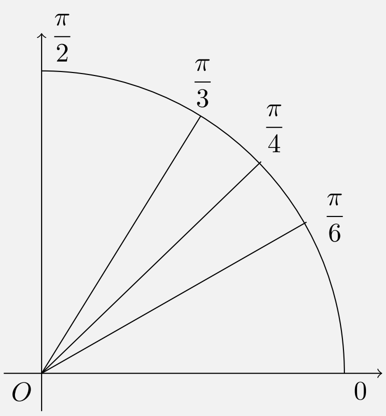
Soit $(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a+b\neq\frac{\pi}{2}$ et $a+b\neq\frac{-\pi}{2}$.

1. $\tan(a+b)=\frac{\tan(b)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
2. $\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$.

4 Angles remarquables.

Théorème 19.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Démonstration : On va faire la démonstration pour $\frac{\pi}{4}$.

- Montrons d'abord que le cos et le sin ont la même valeur.
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
- Déterminons ensuite sa valeur.
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

  Or, $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.
  Finalement, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Exemple 20. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{12}$. Donc, on utilise ensuite la formule de trigonométrie qui relie $\sin(\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

De plus, on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$.

5 Équations trigonométriques.

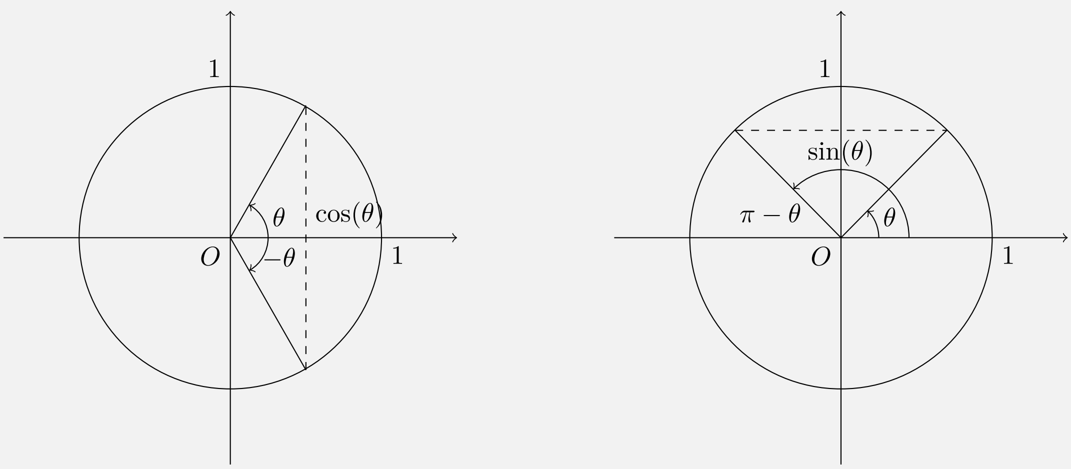
5.1 Égalité de cosinus ou de sinus.

Théorème 21.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ est
$$S = \{a + 2k\pi, -a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}.$$
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ est
$$S = \{a + 2k\pi, \pi - a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi$$



5.2 Équations de degré 2.

Exemple 22. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2(\sin(x))^2 - 3\sqrt{3}\sin(x) + 3 = 0$.

5.3 Arccos, arcsin et arctan.

Théorème 23 (arccos).

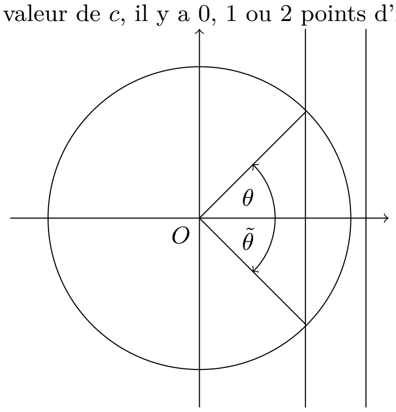
Soit $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $c \notin [-1, 1]$, l'équation $\cos(\theta) = c$ n'admet pas de solution.
2. Si $c \in [-1, 1]$,
   (a) l'équation $\cos(\theta) = c$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$.
   On la note $\theta = \arccos(c)$.
   (b) L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(\theta) = c$ est

$$S = \{\arccos(c) + 2k\pi, -\arccos(c) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

.

Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $x = c$ et le cercle trigonométrique. Selon la valeur de c, il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



1. Si $c \notin [-1, 1]$, il n'y a pas d'intersection.
2. Si $c \in [-1, 1]$, il y deux points d'intersection.
   Un seul correspond à un angle dans le segment $[0, \pi]$.
   C'est lui qu'on appelle $\arccos(c)$.

■

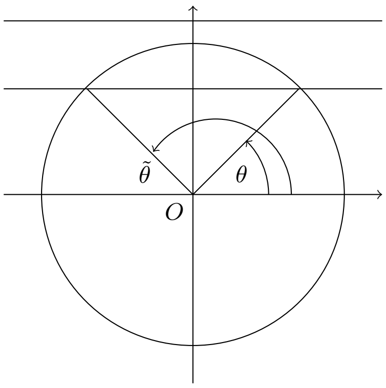
Théorème 24 (arcsin).

Soit $s \in \mathbb{R}$.

1. Si $s \notin [-1, 1]$, l'équation $\sin(\theta) = s$ n'admet pas de solution.
2. Si $s \in [-1, 1]$,
   (a) l'équation $\sin(\theta) = s$ admet une unique solution dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On la note $\theta = \arcsin(s)$.
   (b) L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(\theta) = s$ est

$$S = \{\arcsin(s) + 2k\pi, \pi - \arcsin(s) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y = s$ et le cercle trigonométrique. Selon la valeur de s, il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



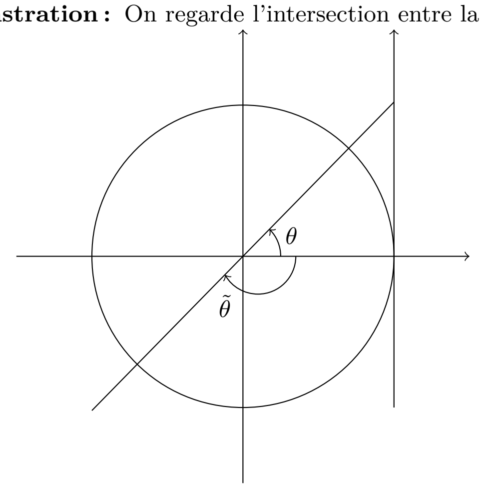
1. Si $s \notin [-1,1]$, il n'y a pas d'intersection.
2. Si $s \in [-1,1]$, il y deux points d'intersection.
   Un seul correspond à un angle dans le segment $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   C'est lui qu'on appelle $\arcsin(s)$.

$\blacksquare$

Théorème 25 (arctan)**.**

Soit $t \in \mathbb{R}$.
L'équation $\tan(\theta) = t$ admet une unique solution dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On la note $\theta = \arctan(t)$.

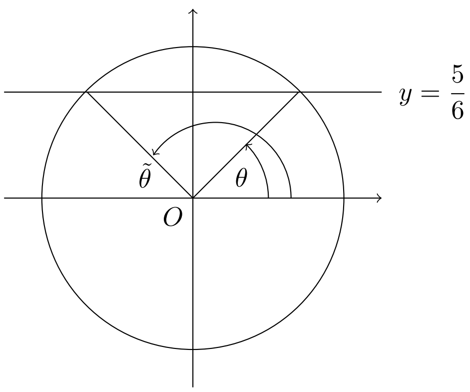
Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y = tx$ et le cercle trigonométrique.



Il y a deux points d'intersection.
Un seul correspond à un angle dans le segment $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
C'est lui qu'on appelle $\arctan(t)$.

$\blacksquare$

Exemple 26. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{5}{6}$.
$\frac{5}{6} < 1$ donc l'équation admet une infinité de solutions.



Les deux solutions évidentes sont $\arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$. Donc,

$$S = \left\{\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$