Exercice 1. Calculer les expressions suivantes

1. $A = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

   $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

2. $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

   $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

3. $C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

   $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
   $= -\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} = \frac{3-5\sqrt{3}}{3}.$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expression suivantes

1. $A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

   $B = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x) - \sin(x) = 0.$

2. $B = \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

   $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$

3. $C = \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

   $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = -\sin(x).$

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations suivantes
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$.
3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$.
4. $|\sin(x)| > \frac{1}{2}$.
5. $|\tan(x)| < \sqrt{3}$.
6. $\sin(2x) = \sin(x)$.

7* $\cos(x) + \sin(x) = 0$.

1. $\cos^2(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.
2. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \ 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.
3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) = 1 \Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) =$
   $1.$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

4. $|\sin(x)|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x)>\frac{1}{2}$ ou $-\sin(x)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x)>\frac{1}{2}$ ou $\sin(x)<-\frac{1}{2}$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x\in\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right[$.
5. $|\tan(\theta)|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<\tan(\theta)<\sqrt{3} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \ \theta\in\left]\frac{-\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi\right[$.
6. $\sin(2x)=\sin(x) \Leftrightarrow x=2x\ [2\pi]$ ou $x=\pi-2x\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$.
7. $\cos(x)+\sin(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

<u>Exercice 4.</u> Déterminer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

On remarque que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Donc, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Or, $\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=1-\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
De plus, $\frac{5\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)>0$.
Donc, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

<u>Exercice 5.</u> Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$.

$\cos(3\theta)=\cos(\theta+2\theta)=\cos(\theta)\cos(2\theta)-\sin(\theta)\sin(2\theta)=\cos(\theta)[2\cos^2(\theta)-1]-\sin(\theta)\times 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
$=2\cos^3(\theta)-\cos(\theta)-2[1-\cos^2(\theta)]\cos(\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\cos(\theta)[4\cos^2(\theta)-3]$.

2. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

On applique la formule précédente à $\theta=\frac{\pi}{6}$.
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-3\right] \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$.
On retrouve la valeur connue.

<u>Exercice 6.</u> Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $\sin^2(x)+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x)=2$.

1. Déterminer une équation du second degré (E) dont $\cos(x)$ est solution.

$\sin^2(x)+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x)=2 \Leftrightarrow 1-\cos^2(x)+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x)=2 \Leftrightarrow \cos^2(x)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x)+1=0$.
Donc, $\cos(x)$ est solution de l'équation $(E): y^2-\frac{3\sqrt{2}}{2}y+1=0$ ou encore $(E): 2y^2-3\sqrt{2}y+2=0$.

2. Résoudre l'équation (E).

   Il s'agit d'une équation du second degré : $\Delta = 18 - 16 = 2 > 0$ donc il y a deux racines réelles $y_1 = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$.

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

   Donc, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = \sqrt{2}$. La deuxième équation n'a pas de solution donc
   $\sin^2(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 7. [*]

1. Soit $s \in [-1;1]$. Simplifier $\sin(\arcsin(s))$.

   $\arcsin(s)$ est l'unique solution dans $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\sin(x) = s$.
   Donc, $\sin(\arcsin(s)) = s$.

2. Soit $s \in [-1;1]$. Simplifier $\cos^2(\arcsin(s))$.

   $\cos^2(\arcsin(s)) = 1 - \sin^2(\arcsin(s)) = 1 - s^2$.

3. Résoudre l'équation $\arcsin(s) = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right)$.

$$\begin{aligned}
\arcsin(s) &= \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \Rightarrow s = \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right). \\
&\Rightarrow s = \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) + \cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\
&\Rightarrow s = \frac{4}{5}.\left|\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\right| + \left|\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right|.\frac{5}{13} \\
&\Rightarrow s = \frac{4}{5}.\left|\sqrt{\frac{144}{13^2}}\right| + \left|\sqrt{\frac{9}{5^2}}\right|.\frac{5}{13} = \frac{4\times 12}{5\times 13} + \frac{3\times 5}{5\times 13} \\
&\Rightarrow s = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

Exercice 8.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Rappeler la formule de trigonométrie donnant $\sin(2x)$ pour tout réel x et l'appliquer pour $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$.
   On simplifiera les fractions au maximum.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
   Si on l'applique à $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$, on obtient $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"}\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\text{"}$$

- Initialisation : Pour $n = 1$.
  $\sin(a) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$.
  Donc, $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
  On utilise le même formule de trigonométrie : $\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) &= \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&\underset{\text{HR}}{=} \frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\times\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}\\
&= \frac{\sin(a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

.