BCPST

1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n 1

— 1 septembre 202 —

Exercice 1.

1.
   - $A = \dfrac{(27)^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^{-3} \times 2^4}{3^{-4} \times 2^4} = \boxed{3}$.
   - $B = \dfrac{3^{21} - 3^{22}}{3^{33} + 3^{30}} = \dfrac{3^{21}(1-3)}{3^{30}(3^3+1)} = \dfrac{-2}{3^9.28} = \boxed{\dfrac{-1}{3^9 \times 14}}$.
   - $C = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1|$.
     Or, $\sqrt{3} - 1 > 0$ donc $\boxed{C = \sqrt{3} - 1}$.
   - $D = \left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{(5-\sqrt{2})^2}{3} = \dfrac{25 - 10\sqrt{2} + 2}{3} = \boxed{\dfrac{27 - 10\sqrt{2}}{3}}$.
2.
3.
$$\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right[}.$$
4. On note x la largeur et y la longueur du rectangle (donc $0 \leqslant x \leqslant y$).
   Les contraintes donnent le système :
$$(S) : \begin{cases} 2(x+y) = 34 \\ xy = 60 \end{cases}$$
   Ainsi :
$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 17 - x \\ x(17-x) = 60 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 17 - x \\ -x^2 + 17x - 60 = 0 \end{cases}$$
   La deuxième équation est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 17^2 - 4\times 60 = 49 > 0$. Donc cette équation a deux solutions réelles distinctes : $\dfrac{-17-7}{-2} = 12$ et $\dfrac{-17+7}{-2} = 5$. Ainsi,
$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 17 - x \\ x = 12 \text{ ou } x = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = (5,12) \text{ ou } (x,y) = (12,5)$$
   Or $x < y$. On en déduit que $\boxed{\text{le rectangle a pour largeur 5 cm et pour longueur 12 cm}}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   (a) $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ n = 2k$
   (b) $\forall k \in \mathbb{Z},\ n \neq 8k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose n impair.
   donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.
   donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$.
   Or, $k(k+1)$ est le produit de 2 entiers successifs donc il est pair.
   donc $\exists\, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = 4.2\tilde{k} = 8\tilde{k}$.
   Donc, 8 divise $n^2 - 1$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La réciproque de l'implication est : n est pair $\Rightarrow n^2-1$ n'est pas divisible par 8.
   (b) Soit n un entier pair. $\exists k \in \mathbb{Z},\ n=2k$.
   donc $n^2-1=4k^2-1=4k^2-2+1=2(2k^2-1)+1$.
   donc $\exists\ K \in \mathbb{Z},\ n^2-1=2K+1$.
   Donc, n^2-1 est impair. En particulier, il n'est pas divisible par 8.
   Donc, la réciproque est vraie.

Exercice 3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n=(2n+1)3^n\text{"}$$

• **Initialisation :**
$u_0=1=(0+1)3^0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
$u_1=9=(2+1)3^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 6u_{n+1}-9u_n && \text{par définition de la suite}\\
&= 6(2n+3)3^{n+1}-9(2n+1)3^n && \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}\\
&= 2(2n+3)3^{n+2}-(2n+1)3^{n+2} && \\
&= (4n+6-2n-1)3^{n+2} && \text{(on a factorisé par } 2^{n+2}\text{)}\\
&= (2n+5)3^{n+2} && \text{donc } \mathcal{P}_{n+2} \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

• **Conclusion :** Ainsi, d'après le principe de récurrence (à deux pas), $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=(2n+1)3^n}$.

Exercice 4.

1. $\boxed{u_0=\sqrt{1},\ u_1=\sqrt{3},\ u_2=\sqrt{5},\ u_3=\sqrt{7}}$.
2. On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\sqrt{2n+1}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: "$u_n=\sqrt{2n+1}$".
   • (Initialisation) On a déjà montré que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies.
   • (Hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   Alors $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n^2}$. Or $u_n=\sqrt{2n+1}$ d'après $\mathcal{P}_n$.
   Donc $u_{n+1}=\sqrt{2+(2n+1)}=\sqrt{2n+3}=\sqrt{2(n+1)+1}$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   • Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 5.

1. Par définition de la racine cubique, $\boxed{A^3=10+6\sqrt{3}}$ et $\boxed{B^3=10-6\sqrt{3}}$.
   $AB=\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})}=\sqrt[3]{100-36.3}=\sqrt[3]{-8}$ donc $\boxed{AB=-2}$.
2. $y^3=(A+B)^3=A^3+3AB^2+3A^2B+B^3=A^3+B^3+3AB(A+B)=A^3+B^3+3ABy$.
   Or, $A^3+B^3=20$ et $AB=-2$ d'où $\boxed{y^3=20-6y}$.
3. On remarque que $2^3-20+6.2=8-20+12=0$ donc $\boxed{\text{2 est une racine évidente.}}$
4. On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse Supposons qu'il existe deux réels b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3+6x-20=(x-2)(x^2+bx+c)$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^3+6x-20=x^3+bx^2+cx-2x^2-2bx-2c=x^3+(b-2)x^2+(c-2b)x-2c$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b-2=0 \\ c-2b=6 \\ -2c=-20 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ 10-2.2=6 \\ c=10 \end{cases}$$

Synthèse : Posons $b=2$ et $c=10$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(x-2)(x^2+2x+10) = x^3+2x^2+10x-2x^2-4x-20 = x^3+6x-20.$

Donc, $\boxed{\text{il existe deux réels } b \text{ et } c \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R},\ x^3-20+6x=(x-2)(x^2+bx+c).}$

5. Résolvons l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^3-20+6x=0 &\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+10)=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } \underbrace{x^2+2x+10}_{(*)}=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Car le discriminant du trinôme (*) vaut $\Delta = 4-40<0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{2\}}$.

6. Nous avons établi que $y^3 = 20-6y$, donc y est solution de l'équation précédente. Puisque y est réel et que cette équation a une unique solution réelle, on en déduit $\boxed{y=2}$.