

Exercice 1. — Calculs

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Donc, f' est positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$.

Donc, f est croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.

On en déduit que f est majorée par sa valeur en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) - 2\sqrt{x} < -2$ donc, en particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) < 2\sqrt{x}}.$$

2. (E) : $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Posons $X = \sin(x)$. Alors (E) $\Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$. C'est une équation du second degré en X . En calculant son discriminant, on trouve que cette équation a deux racines réelles qui sont 2 et $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 2 \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ car } \sin x = 2 \text{ n'a pas de solution} \\ &\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $0 \leq (\sin(x))^2 \leq 1$. Donc, par somme, $\boxed{x \leq f(x) \leq x + 1}$.

- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Par comparaison (minoration) de fonctions, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty. \text{ Par comparaison (majoration) de fonctions, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{(\sin(x))^2}{x}$.

$$\text{On sait que } 0 \leq (\sin(x))^2 \leq 1. \text{ Donc, par quotient puis somme, } \boxed{1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}}.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1. \text{ Par le théorème d'encadrement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Exercice 2.

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow 1+x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de f est $] -1, +\infty[$.

- (b) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

- (c) • Signe de f' : $f'(x)$ est du signe de $-x$ car $\forall x \in \mathcal{D}, 1+x > 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $] -1, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Limite en -1 : $\lim_{x \rightarrow -1} (1+x) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$ donc par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$.

Ainsi, par somme des limites, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe.

- Limite en $+\infty$: nous devons factoriser car nous sommes en présence d'une forme indéterminée de la somme.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = -x \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right).$$

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ par croissances comparées et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 \text{ par quotient de limites.}$$

$$\text{Donc, par somme des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

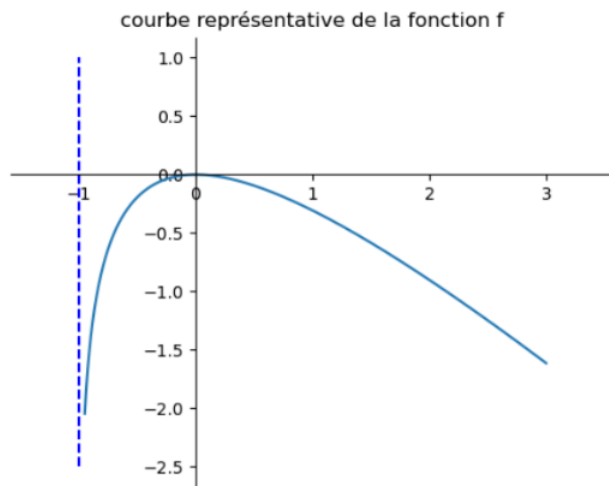
$$\text{Puis, par produit des limites, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}.$$

- Nous constatons que f présente un maximum en $x = 0$ donc il est intéressant de connaître sa valeur en 0. On trouve : $f(0) = 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	0	$-\infty$

(d) On déduit de l'étude précédente le graphe de f .



- D'après le tableau de variations, f admet un maximum en $x = 0$ et $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathcal{D}$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.

On en déduit : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \ln(1+x) \leq x}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$\frac{1}{k} > 0$ donc $\frac{1}{k} \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente à $\frac{1}{k}$: $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. Ainsi, $\boxed{\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$.

Exercice 3 - Trigonométrie.

1. Questions préliminaires

$$(a) \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4^2} = \frac{8 + 2 \times 2\sqrt{3}}{4^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}. \text{ Donc, puisque } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} > 0 :$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}.$$

$$\text{De même, } \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \text{ et } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} > 0, \text{ donc } \boxed{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

$$(b) \text{ D'après une formule de trigonométrie, } \boxed{\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}.$$

(c) Appliquons la formule précédente avec $\theta = \frac{\pi}{12}$. Sachant que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

On en déduit deux valeurs possibles pour $\cos \frac{\pi}{12}$: $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$ ou $\cos \frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$.

Or $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ car $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement positif.

Donc $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$. Ainsi, d'après la première question, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Pour calculer $\sin \frac{\pi}{12}$, on utilise la formule de trigonométrie :

$\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1$. Donc $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. Or $\sin \frac{\pi}{12} > 0$ car $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit :

$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$. D'où, d'après la première question : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

(d) $\frac{17\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12}$ donc $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Ainsi, $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$. Or $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ et $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$.

Donc $\cos(3\theta) = (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta$. Puis, avec $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$\cos(3\theta) = 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta(1 - \cos^2 \theta)$. D'où $\cos 3\theta = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

3. (a) Tout réel x appartenant à $[-1, 1]$ peut s'écrire $x = \cos \theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$. Ainsi :

x est solution de $8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0$ si, et seulement si, $8\cos^3 \theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2} = 0$.

$$8\cos^3 \theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2} = 0 \iff 2(4\cos^2 \theta - 3\cos(\theta)) - \sqrt{2} = 0$$

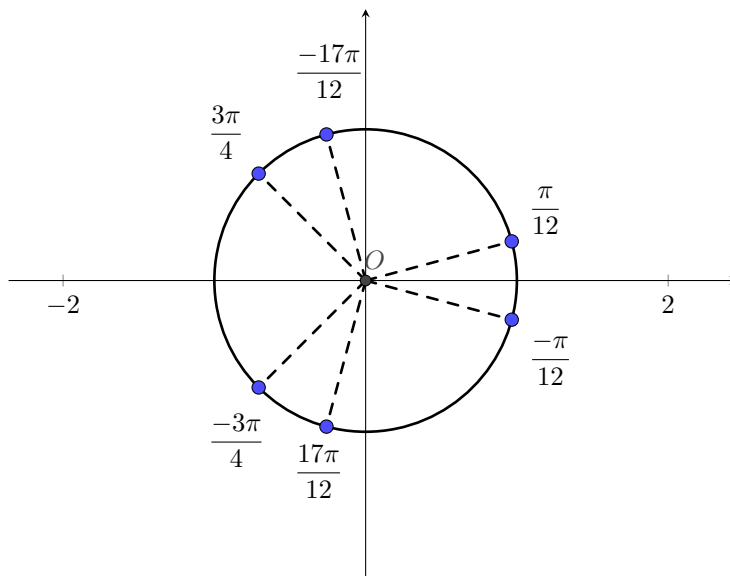
$$\iff 2\cos(3\theta) = \sqrt{2} \iff \cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

On représente alors les valeurs possibles pour θ sur le cercle trigonométrique (*) :



Ainsi, on peut affirmer que :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right).$$

Remarque ()*. Comme le cosinus est une fonction paire, il n'est pas nécessaire de considérer les autres angles.

Ainsi, sur $[-1, 1]$, l'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) \right\}.$$

- (b) Dans la question précédente, on a trouvé trois expressions pour les solutions. Il faut s'assurer que ces trois expressions sont bien différentes deux à deux.

$$\frac{17\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi \text{ donc } \cos\frac{17\pi}{12} = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3\pi}{4} < \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$,

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) > \cos\left(\frac{9\pi}{12}\right)$. Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Donc les trois solutions obtenues à la question précédente sont deux à deux distinctes. Donc cette équation possède au-moins trois solutions.

Or on a admis qu'elle possède au-plus 3 solutions. On en déduit que l'équation possède exactement 3 solutions, qui sont celles obtenues à la question précédente. On a calculé les valeurs des cosinus au début de

l'exercice. D'où l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Exercice 4.

1. Première méthode.

- (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3 \cdot (a+b) \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Donc,
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} \geq 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
 (E) &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}\right)^4 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{\cos(x)}^4 + 4\sqrt{\cos(x)}^3\sqrt{\sin(x)} + 6\sqrt{\cos(x)}^2\sqrt{\sin(x)}^2 + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}^3 + \sqrt{\sin(x)}^4 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x)^2 + 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}\sin(x) + \sin(x)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}\sin(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0
 \end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient que $\boxed{\text{l'équation (E) est équivalente à l'équation (E')} }.$

- (c) • Si $x = 0$, $2\cos(0) + 3\sqrt{\cos(0)\sin(0)} + 2\sin(0) = 2 > 0$.
 • Si $x = \frac{\pi}{2}$, $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$.
 • si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos(x) > 0$, $\sqrt{\sin(x)} > 0$, $\sqrt{\cos(x)} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
 Par somme de réels strictement positifs, $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0.}$

(d) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
 (E) &\Leftrightarrow \sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{\cos(x)\sin(x)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}}.$

2. Deuxième méthode.

- (a) Soit $a \in]0, 1[$. $a^2 - \sqrt{a} = a^2 - a^{1/2}$.
 Or, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car $a \in]0, 1[$. Donc, $a^2 - a^{1/2} < 0$.
 Donc, $\boxed{a^2 < \sqrt{a}}.$

- (b) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. $1 > \cos(x) > 0$ et $1 > \sqrt{\sin(x)} > 0$.
 Par la question précédente, $\sqrt{\cos(x)} > (\cos(x))^2$ et $\sqrt{\sin(x)} > (\sin(x))^2$.
 Par somme d'inégalités, $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.
 Donc, $\boxed{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1}.$

- (c) D'après la question précédente, l'équation (E) n'a pas de solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Il reste à vérifier pour 0 et $\frac{\pi}{2}$.

- Pour $x = 0$, $\sqrt{\cos(0)} + \sqrt{\sin(0)} = 1$.
- Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$.

Donc, $\boxed{S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}}.$