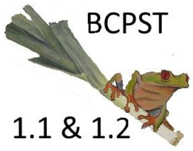

Devoir Surveillé n°2

Samedi 5 octobre 2024

– Ensembles, Étude de fonctions et trigonométrie. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.
N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Calculs.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) < 2\sqrt{x}$.
2. Soit $f : x \mapsto (1-x)^{1-x}$.
   Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de f.

Exercice 2 – Étude de fonction.

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + (\sin(x))^2$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq f(x) \leq x+1$.
   (b) En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sin(x))^2}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)+\pi$.
   (b) Tracer le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$.
   (c) Tracer le graphe de f sur $[0,\pi]$.
   Comment obtient-on le graphe sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer les points où la courbe de f admet une tangente horizontale.
4. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 – Équation et trigonométrie.

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. On démontrera la formule.
   (b) Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   (c) En déduire les valeurs de $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
3. On veut résoudre l'équation :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0.$$

On admet que cette équation admet au plus trois solutions.

(a) Rechercher les solutions de cette équation sur $[-1,1]$, en posant $x = \cos(\theta)$. On exprimera les solutions sous forme de cosinus.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E). On exprimera les solutions avec des racines.

Exercice 2 – Étude de fonction bis.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$ et $g : x \mapsto 2(x+1) - x\ln(x)$.

1. **Etude de f.**
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.
   On l'exprimera en fonction de g.
2. **Etude de g.**
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
   (d) Justifier que g est dérivable sur D_g et calculer sa dérivée.
   (e) En déduire le tableau de variation de g sur D_g.
   (f) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. On la note α.
   On ne cherchera pas à déterminer sa valeur .
   (g) En déduire le signe de $g(x)$ selon la valeur de x.
3. En déduire le tableau de variation de f.