<u>Exercice 1.</u> Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.
4. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.
5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.
6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

<u>Exercice 2.</u> Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \leq N.$
2. $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ x = x^2.$

<u>Exercice 3.</u> Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

<u>Exercice 4.</u> Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 6$ divise $5n^3 + n$.
2. Montrer que la propriété "8 divise $9^n + 1$" est héréditaire.
   Que peut-on en conclure ?

<u>Exercice 5.</u> Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Exercice 6.</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3,\ \ u_1 = 7\ \ \forall n \geq 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

Démontrer, à l'aide d'une **récurrence double**, que
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

<u>Exercice 7.</u> [**] Démontrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

<u>Exercice 8.</u> [**] Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

<u>Exercice 9.</u> [**] Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

<u>Exercice 10.</u> [**] Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\ \ \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$