



Devoir Surveillé n°1

Samedi 24 septembre 2022

– Logique, ensembles, récurrence et réels –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.

Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 : Vrai ou Faux

Pour chaque proposition mathématique, dire si elle est vraie ou fausse. On ne demande pas de justification.

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a - b)^2 = a^2 - b^2$.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$.
4. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad - bc}{bd} \geq 0$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 0$. $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x(x+1)}$.
6. $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
7. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$. $\frac{a^{b^c}}{a^{c^b}} = a^{b^c - c^b}$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x > 0 \Rightarrow x \geq 0$.
9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $a \geq b \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 1$.

Exercice 2 : Autour de la récurrence

1. Montrer **par récurrence** que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 - n$ est pair.
2. Proposer une autre démonstration.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4^n - 3^n$.

Exercice 3 : Avec des quantificateurs

Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes.

1. (a) Tout entier est le carré d'un entier.
(b) Tout entier a pour carré la somme de deux carrés d'entiers.
(c) Certains entiers ont pour carré la somme de deux carrés d'entiers.
(d) Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
(a) La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
(b) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution sur $\mathbb{R}$.
(c) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
(d) La fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Des ensembles

Soit E un ensemble. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

Montrer que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 5 : Racines cubiques

On rappelle que pour tout réel a , il existe un unique réel appelé "racine cubique de a ", et noté $\sqrt[3]{a}$ solution de l'équation $x^3 = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Dans cet exercice, on note $A = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$, $B = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ et $y = A + B$.

1. Calculer A^3 , B^3 et AB .
2. En déduire que $y^3 = 20 - 6y$.
3. Proposer une racine évidente de l'équation $x^3 + 6x - 20 = 0$.
4. Montrer qu'il existe deux réels b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + bx + c)$.
On donnera leur valeur.
5. En déduire une expression simplifiée de y .

Exercice 6 : Autour de la rationalité

Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $x \in \mathbb{Q}$ signifie $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$.

On dit alors que x est *rationnel*.

Un réel non rationnel est dit *irrationnel*.

1. Montrer que tous les nombres entiers sont des rationnels.
2. Soit $x \neq 0$. Montrer que si x est rationnel alors $\frac{1}{x}$ aussi.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.
 - (a) Montrer que $x \times y$ est rationnel.
 - (b) Montrer que $x + y$ est rationnel.
4. Soient x un nombre rationnel et y un nombre irrationnel. Démontrer que $x + y$ est un nombre irrationnel.
On pourra raisonner par l'absurde.
5. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Le réel $\sqrt{24 - 9\sqrt{2}}$ est-il rationnel?
6. Soient x et y deux irrationnels. Que pensez-vous de $x \times y$?
7. Soient x et y deux irrationnels. Que pensez-vous de $x + y$?