BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 1

— 24 septembre 2022—

Exercice 1 : Vrai ou Faux

1. $\boxed{\text{Faux}}$. C'est $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2. $\boxed{\text{Vrai}}$.

3. $\boxed{\text{Faux}}$. C'est $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.\ \dfrac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow (a \geq 0,\ b \geq 0)$ ou $(a \leq 0,\ b \leq 0)$.

4. $\boxed{\text{Vrai}}$.

5. $\boxed{\text{Faux}}$. C'est $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 0.\ \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2 + 2(x+1)}{x(x+1)}$.

6. $\boxed{\text{Vrai}}$.

7. $\boxed{\text{Vrai}}$.

8. $\boxed{\text{Vrai}}$.

9. $\boxed{\text{Faux}}$. C'est $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.\ a \geq b$ et $b > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \geq 1$.

Exercice 2 : Autour de la récurrence

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $P(n)$: "$n^2 - n$ est pair".

   <u>*I*</u> Pour $n = 0$: $0^2 - 0$ est pair donc <u>$P(0)$ est vraie</u>.

   <u>*H*</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - (n+1) = n^2 + n = n^2 - n + 2n$.
   Or, $n^2 - n$ est pair par hypothèse et $2n$ est pair. Donc, $(n+1)^2 - (n+1)$ est pair.
   Donc, <u>$P(n+1)$ est vraie</u>.

   <u>*C*</u> Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - n \text{ est pair.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2 - n = n(n-1)$.
   Il s'agit d'un produit de deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Donc le produit est pair.
   D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - n \text{ est pair.}}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $P(n)$: "$u_n = 4^n - 3^n$".

   <u>*I*</u> Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $4^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ donc <u>$P(0)$ est vraie</u>.
   Pour $n = 1$: $u_1 = 1$ et $4^1 - 3^1 = 1$ donc <u>$P(1)$ est vraie</u>.

   <u>*H*</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies. Montrons que $P(n+2)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 7u_{n+1} - 12u_n = 7\underbrace{\left(4^{n+1} - 3^{n+1}\right)}_{\text{d'après } \mathcal{P}_{n+1}} - 12\underbrace{\left(4^n - 3^n\right)}_{\text{d'après } \mathcal{P}_n} \\
&= 7.4^{n+1} - 12.4^n - 7.3^{n+1} + 12.3^n \\
&= 4^n(7.4 - 12) - 3^n(7.3 - 12) = 4^n.16 - 3^n.9 \\
&= 4^{n+2} - 3^{n+2}
\end{aligned}$$

   D'où <u>$P(n+2)$ est vraie</u>.

   <u>*C*</u> Par le principe de récurrence double, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n - 3^n}$.

Exercice 3 : Avec des quantificateurs

1. (a) $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z}\ /\ m^2 = n.$
   (b) $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z}\ /\ m^2 = a^2 + b^2.$
   (c) $\exists\, n \in \mathbb{Z},\ \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z}\ /\ m^2 = a^2 + b^2.$
   (d) $\neg\,(\exists\, n \in \mathbb{N}\ /\ \forall m \in \mathbb{Z},\ n \geq m) = \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m.$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$
   (b) $\exists!\ x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) = 0.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y).$
   (d) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0).$

Exercice 4 : Des ensembles

On raisonne par double implication.

$\underline{\Leftarrow}$ On suppose que $A = B$.
Donc, $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$. D'où $A \cup B = A \cap B$.

$\underline{\Rightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cap B$.
On raisonne par double inclusion pour montrer que $A = B$.

$\subset$ Soit $x \in A$.
$\Rightarrow x \in A \cup B$ car $A \subset A \cup B$.
$\Rightarrow x \in A \cap B$ car $A \cap B = A \cup B$.
$\Rightarrow x \in B$.
Donc, $\underline{A \subset B}$.

$\supset$ Par symétrie de l'hypothèse, on obtient la symétrie du résultat, $\underline{B \subset A}$.

Finalement, $A = B$

Donc, on a bien montré que $\boxed{A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B}$.

Exercice 5 : Racines cubiques

1. Par définition de la racine cubique, $\boxed{A^3 = 10 + 6\sqrt{3}}$ et $\boxed{B^3 = 10 - 6\sqrt{3}}$.
   $AB = \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{100 - 36.3} = \sqrt[3]{-8}$ donc $\boxed{AB = -2}$.

2. $y^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3AB^2 + 3A^2B + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABy.$
   Or, $A^3 + B^3 = 20$ et $AB = -2$ d'où $\boxed{y^3 = 20 - 6y}$.

3. On remarque que $2^3 - 20 + 6.2 = 8 - 20 + 12 = 0$ donc $\boxed{\text{2 est une racine évidente.}}$

4. On raisonne par analyse et synthèse.

<u>Analyse</u> Supposons qu'il existe deux réels b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + bx + c)$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 6x - 20 = x^3 + bx^2 + cx - 2x^2 - 2bx - 2c = x^3 + (b-2)x^2 + (c-2b)x - 2c.$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 2 = 0 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 10 - 2.2 = 6 \\ c = 10 \end{cases}$$

<u>Synthèse :</u> Posons $b = 2$ et $c = 10$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(x-2)(x^2 + 2x + 10) = x^3 + 2x^2 + 10x - 2x^2 - 4x - 20 = x^3 + 6x - 20.$

Donc, $\boxed{\text{il existe deux réels } b \text{ et } c \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 20 + 6x = (x-2)(x^2 + bx + c).}$

5.

$$\begin{aligned} y^3 = 20 - 6y &\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+10) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y^2+2y+10 = 0 \end{aligned}$$

Or, le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 4 - 40 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle.
Finalement, $\boxed{y = 2}$.

Exercice 5 : Autour de la rationnalité

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On peut écrire $n = \dfrac{n}{1}$ donc $n \in \mathbb{Q}$. D'où $\boxed{\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$, $\neq 0$.
   $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z}^*,\ \exists\, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$.
   $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a}$.
   Donc, $\boxed{\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}}$.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. Donc, $\exists\, a \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, \tilde{a} \in \mathbb{Z},\ \exists\, \tilde{b} \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$.

   (a) $x \times y = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{a\tilde{a}}{b\tilde{b}}$. Or, $a\tilde{a} \in \mathbb{Z}$ et $b\tilde{b} \in \mathbb{N}^*$ d'où $\boxed{xy \in \mathbb{Q}}$.

   (b) $x + y = \dfrac{a}{b} + \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{a\tilde{b} + \tilde{a}b}{b\tilde{b}}$. Or, $a\tilde{b} + \tilde{a}b \in \mathbb{Z}$ et $b\tilde{b} \in \mathbb{N}^*$ d'où $\boxed{x + y \in \mathbb{Q}}$.

4. Soient x un nombre rationnel et y un nombre irrationnel.
   On raisonne par l'absurde en supposant que $x + y$ est un rationnel.
   $-1 \in \mathbb{Z}$ donc $-1 \in \mathbb{Q}$.
   De plus, $x \in \mathbb{Q}$ donc, par produit, $-1 \times x = -x \in \mathbb{Q}$.
   Donc, par somme, $(x + y) + (-x) = y \in \mathbb{Q}$.
   C'est absurde donc $\boxed{x + y \notin \mathbb{Q}}$.

5. On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{24 - 9\sqrt{2}}$ est un rationnel.
   Soient $a \in \mathbb{Z}^*,\ b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{24 - 9\sqrt{2}} = \dfrac{a}{b}$.
   $\Rightarrow 24 - 9\sqrt{2} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.
   $\Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{24 - \dfrac{a^2}{b^2}}{9} = \dfrac{24b^2 - a^2}{9b^2}$.
   Or, $24b^2 - a^2 \in \mathbb{Z}$ et $9b^2 \in \mathbb{N}^*$. Donc, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
   C'est absurde. D'où $\boxed{\sqrt{24 - 9\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}}$.

6. Soient x et y deux irrationnels. On ne peut pas conclure sur le caractère rationnel de $x \times y$.
   Par exemple, si $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$, on a $x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}$ et $x \times y \in \mathbb{Q}$.
   Mais, si $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{3}$, on a $x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}$ et $x \times y \notin \mathbb{Q}$.

7. Soient x et y deux irrationnels. On ne peut pas conclure sur le caractère rationnel de $x + y$.
   Par exemple, si $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$, on a $x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}$ et $x + y \in \mathbb{Q}$.
   Mais, si $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$, on a $x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}$ et $x + y \notin \mathbb{Q}$.