Chapitre 04 : Ensembles

Table des matières

1 Définitions, appartenance, inclusion. 2

1.1 Les ensembles usuels. 2

1.2 Définitions d'un ensemble. 2

1.3 Inclusion 3

2 Parties d'un ensemble 3

2.1 Définition 3

2.2 Opérations sur les parties d'un ensemble 4

3 Produit cartésien, couples et $p-$uplets. 5

4 Parties de $\mathbb{R}$. 6

4.1 Intervalles de $\mathbb{R}$. 6

4.2 Maximum et minimum d'un ensemble. 7

4.3 Majorant, minorant d'un ensemble. 7

4.4 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ 8

4.5 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ 8

1 Définitions, appartenance, inclusion.

1.1 Les ensembles usuels.

Les ensembles usuels sont

- $\varnothing$, l'ensemble vide
- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels
- $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes

Pour E un ensemble,

- On note E^* l'ensemble E privé de 0.
- On note E_+ l'ensemble qui contient les éléments positifs de E.
- On note E_- l'ensemble qui contient les éléments négatifs de E.

1.2 Définitions d'un ensemble.

Définition 1.

Lorsqu'un ensemble E est défini en faisant la liste des objets qu'il contient, on dit qu'il est défini par extension.

$$E = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Ces objets sont appelés éléments de l'ensemble E.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément, on parle de singleton : $\{x_1\}$.

On dit que y appartient à E lorsque y est un des éléments de E.

$$y \in E \Leftrightarrow \exists\, i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } y = x_i$$

Exemple 2. $E = \{1, 7, 12, 85\}$ est défini par extension.

Définition 3.

Lorsqu'un ensemble E est défini par une propriété que vérifient les éléments d'un autre ensemble F, on dit qu'il est défini par compréhension.

$$E = \{x \in F \;\text{ tel que } P(x)\}$$

On dit que y appartient à E lorsque $P(y)$ est vraie.

$$y \in E \Leftrightarrow P(y) \text{ est vraie}$$

Exemple 4. Prenons $E = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = 2\right\}$. Il est défini par compréhension.
Donner sa définition par extension.

Exemple 5. Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 = 2 - y\right\}$. Il est défini par compréhension.
Donner sa définition par extension.

1.3 Inclusion

Définition 6.

Soient E et F deux ensembles. On dit que <u>E est inclus dans F</u> lorsque tous les éléments de E appartiennent à F. On note $E \subset F$ ou $F \supset E$.

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E \ , \ x \in F$$

Remarque 7. Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on devra démontrer que tous les éléments de E sont inclus dans F.

1. Soit $x \in E$.
2. ...
3. donc $x \in F$.

Exemple 8. On note $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 2x - y = 1\right\}$ et $F = \{(t+1, 2t+1), t \in \mathbb{R}\}$.

1. Donner deux éléments de chaque ensemble.
2. Montrer que $F \subset E$.

Remarque 9. Il faut bien distinguer les symboles $\in$ et $\subset$.

- $x \in E$: l'élément x appartient à l'ensemble E.
- $A \subset E$: l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E.

Remarque 10. L'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

Définition 11.

Soient E et F deux ensembles. On dit que <u>E est égal à F</u> lorsque E est inclus dans F et que F est inclus dans E.

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \text{ et } (F \subset E)$$

2 Parties d'un ensemble

2.1 Définition

Définition 12.

Soit E un ensemble. On appelle <u>sous-ensemble ou partie de E</u> tout ensemble inclus dans E.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble contenant toutes les parties de E.

Exemple 13. Faire la liste des parties de $E = \{0,1\}$ puis de $F = \{0,1,2\}$.

Remarque 14. Une partie de E est *incluse* dans E mais elle *appartient* à l'ensemble des parties de E.

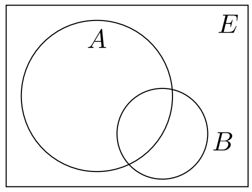
$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

2.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 15.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle union de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A \text{ ou } x \in B)\}$$



Théorème 16.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

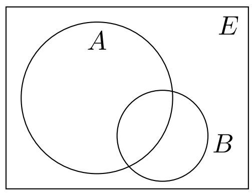
1. $A \cup \varnothing = A$. *existence d'un élément neutre.*
2. $A \cup E = E$.
3. $A \cup A = A$.
4. L'union est **commutative** : $A \cup B = B \cup A$.
5. L'union est **associative** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

Remarque 17. L'opérateur union fonctionne comme l'opérateur logique *OU*.

Définition 18.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble défini par

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A \text{ et } x \in B)\}$$



Théorème 19.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E. Alors,

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cap E = A$.
3. $A \cap A = A$.
4. L'intersection est **commutative** : $A \cap B = B \cap A$.
5. L'intersection est **associative** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

Remarque 20. L'opérateur intersection fonctionne comme l'opérateur logique *ET*.

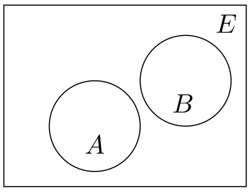
Théorème 21.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. L'intersection est **distributive** sur l'union : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. L'union est **distributive** sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

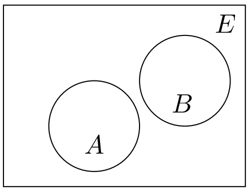
Définition 22.

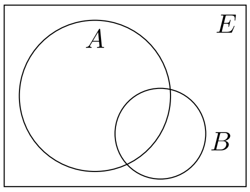
Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.



On dit alors que l'union $A \cup B$ est une union disjointe et on la note $A \amalg B$.

Remarque 23. Il ne faut pas confondre *disjoint* et *distinct*.

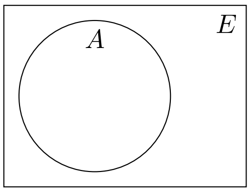




Définition 24.

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.
On appelle complémentaire de A dans E et on note $\overline{A}$ l'ensemble défini par

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$$



Théorème 25.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. $\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

3 Produit cartésien, couples et $p-$uplets.

Définition 26.

Soient E et F deux ensembles.
On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble défini par

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés des couples.

Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$.

Exemple 27. Pour $E = \{a, 5\}$ et $F = \{3, b\}$, $E \times F = \{(a, 3), (a, b), (5, 3), (5, b)\}$.

Exemple 28. Proposer un élément de $\mathbb{N} \times [0, 1]$.

Exemple 29. Représenter $[0, 5] \times [-2, 1]$ et $[2, 6] \times \mathbb{R}$.

Définition 30.

Soit E un ensemble. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.
On appelle $p-$uplet de E ou $p-$liste de E la donnée de p éléments de E dans un ordre précis.

On note E^p l'ensemble des $p-$uplets de E.

$$E^p = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E\}$$

Exemple 31. (2,2,3,5) est un $4-$uplet de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarque 32. On imagine quatre tirages successifs avec remise dans l'ensemble E.

Remarque 33. L'ordre est très important. Si $a \neq b$ alors $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$.

4 Parties de $\mathbb{R}$.

4.1 Intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 34.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles suivants.

- L'ensemble vide : $\varnothing$
- Un segment : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$
- Un intervalle borné, semi-ouvert :
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leq b\}$ ou $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$
- Un intervalle borné, ouvert :
  $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$
- Un intervalle semi-ouvert, non borné :
  $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x\}$ ou $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq b\}$
- Un intervalle ouvert non borné :
  $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x\}$ ou $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < b\}$
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.

Remarque 35.

1. Chaque intervalle est associé à une ou deux inégalités.
2. Les bornes n'appartiennent pas toujours à l'intervalle.

Définition 36 (Hors-programme)**.**

Soit I une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ lorsque I est l'ensemble vide ou lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

4.2 Maximum et minimum d'un ensemble.

Définition 37.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un plus petit élément (ou un minimum) lorsque :

$$\exists\, m \in A \text{ tel que } \forall x \in A,\ m \leq x.$$

On dit que A admet un plus grand élément (ou un maximum) lorsque :

$$\exists\, M \in A \text{ tel que } \forall x \in A,\ x \leq M.$$

Théorème 38.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A admet un plus petit (resp. plus grand) élément alors il est unique et on le note $\min(A)$ (resp. $\max(A)$).

Exemple 39.

- Pour l'intervalle $[a, b]$, a est le plus petit élément et donc un minorant.
- Pour l'intervalle $]a, b[$, b est un majorant mais pas le plus grand élément.
- Pour $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, 0 est un minorant mais pas le plus petit élément et 1 est le plus grand élément donc un majorant.

4.3 Majorant, minorant d'un ensemble.

Définition 40.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est minorée lorsqu'il existe un réel a plus petit que tous les éléments de A.

$$A \text{ minorée } :$$

On dit que a est un minorant de A.

On dit que A est majorée lorsqu'il existe un réel a plus grand que tous les éléments de A.

$$A \text{ majorée } :$$

On dit que a est un majorant de A.

On dit que A est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

$$A \text{ bornée } :$$

Exemple 41.

- Les intervalles $[a, b]$ et $]a, b[$ sont bornés.
- L'intervalle $]a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré.
- L'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré par 0 et majorée par 1 avec $0 \notin A$ et $1 \in A$.

Remarque 42. Un plus petit élément est un minorant, un plus grand élément est un majorant.

4.4 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 43.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A.
On le note $\sup(A)$.

Exemple 44. $\sup([1,2]) = 2,\ \sup([1,2[) = 2$.

Exemple 45. $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne supérieure car n'est pas majoré.

Théorème 46.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne supérieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et
$$\sup(A) = \max(A).$$

Théorème 47 (Admis)**.**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

4.5 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 48.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A.
On le note $\inf(A)$.

Exemple 49. $\inf([1,2]) = 1,\ \inf(]1,2]) = 1$.

Exemple 50. $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne inférieure.

Théorème 51.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne inférieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et
$$\inf(A) = \min(A).$$

Théorème 52 (Admis)**.**

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.