Chapitre 03 : Logique et raisonnements

Table des matières

1 Quantificateurs.

1.1 Définitions.

Définition 1.

Le quantificateur $\underline{\in}$ traduit l'appartenance d'un élément à un ensemble.
Le quantificateur $\underline{\notin}$ traduit la non appartenance d'un élément à un ensemble.

Définition 2.

Le quantificateur universel $\underline{\forall}$ signifie <u>pour tout</u>.

Exemple 3. La proposition « Tous les carrés de nombres réels sont positifs » s'écrit avec les quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq 0.$$

Définition 4.

Le quantificateur existentiel $\underline{\exists}$ signifie <u>il existe au moins un élément</u> tel que ...

Exemple 5. La proposition « Il existe un réel dont le carré vaut $\sqrt{2}$ » s'écrit avec les quantificateurs

$$\exists\ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \sqrt{2}.$$

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comment traduire n **est impair** ? ....

Définition 7.

Le quantificateur $\underline{\exists!}$ signifie <u>il existe exactement un élément</u> tel que ...

Exemple 8. La proposition « Il existe un unique réel dont le double vaut la moitié » s'écrit avec les quantificateurs

$$\exists!\ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x = \frac{x}{2}.$$

Exemple 9. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$
- $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$
- $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$

1.2 Ordre des quantificateurs.

Exemple 10. Comment traduire **Tous les points de E ont un antécédent par f dans A** ?

....

Remarque 11. L'ordre des quantificateurs est **très** important.
Dans chacune des phrases suivantes, combien y a-t-il de lits ?

- Tous les ours ont un lit.

- C'est le même lit pour tous les ours.

Exemple 12. Comparer les propositions suivantes.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$
- $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$

Théorème 13.

Lorsqu'on utilise plusieurs fois le même quantificateur, on peut inverser l'ordre.
Lorsqu'on utilise des quantificateurs différents, on ne peut pas inverser l'ordre.

Exemple 14. On peut écrire « $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \ldots$ » ou bien « $\forall b \in B,\ \forall a \in A,\ \ldots$ »

2 Rudiments de logiques.

2.1 Énoncés mathématiques.

Définition 15.

On appelle proposition mathématique un énoncé portant sur certains objets mathématiques.
Elle peut être vraie ou fausse.

Exemple 16.

- "Le nombre 3 est pair" est une proposition fausse.
- "il existe un nombre réel x tel que $x^2 = 1$" est une proposition vraie.

Définition 17.

On appelle conjecture une propositions mathématique dont on soupçonne la véracité mais qui n'a pas (encore) été démontrée.

Exemple 18. On verra la conjecture de Syracuse en informatique.

Définition 19.

Deux propositions A et B sont dites équivalentes lorsqu'elles ont la même table de vérité. On note $A \equiv B$.

2.2 Connecteurs logiques.

Définition 20.

Soit A une proposition mathématique.
La négation de A, notée NON A, est la proposition qui dit que A est fausse.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	NON A
V	
F	

Exemple 21.

1. NON$(2 \leq 3) \equiv$ ....
2. La négation de **Sophie est à la piscine** est ....

Théorème 22.

Soit A une proposition mathématique.

$$\text{NON}(\text{NON}A) \equiv A$$

Définition 23.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
L'assertion A ET B est vraie lorsque A et B sont vraies et fausse sinon.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A ET B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition 24.

Soient A et B deux assertions.
L'assertion A OU B est vraie dès que A ou B est vraie.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A OU B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple 25. Pour A= « 3 est pair » et B= « 6 est pair » , la proposition A OU B est vraie.

Théorème 26.

Soient A et B deux assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A ET $A \equiv A$
2. A ET $B \equiv B$ ET A *Commutativité de et*
3. A OU $A \equiv A$
4. A OU $B \equiv B$ OU A *Commutativité de ou*
5. A ET (NON A) est toujours fausse.
6. A OU (NON A) est toujours vraie.
7. NON (A ET B) $\equiv$(NON A) OU (NON B). *Négation de ET*
8. NON (A OU B) $\equiv$ (NON A) ET (NON B). *Négation de OU*

Exemple 27. La négation de la proposition (x est pair et $x \geq 5$) est
....

Théorème 28.

Soient A,B et C trois assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A OU (B OU C) $\equiv$ (A OU B) OU $C \equiv A$ OU B OU C *Associativité de OU*
2. A ET (B ET C) $\equiv$ (A ET B) ET $C \equiv A$ ET B ET C *Associativité de ET*
3. A OU (B ET C) $\equiv$ (A OU B) ET (A OU C) *Distributivité de OU sur ET*
4. A ET (B OU C) $\equiv$ (A ET B) OU (A ET C) *Distributivité de ET sur OU*

2.3 Implications et équivalences.

Définition 29.

Soient A et B deux propositions mathématiques.
La proposition <u>A implique B</u>, notée $A \Rightarrow B$, est définie par $A \Rightarrow B \equiv \big(\text{(NON } A\text{) OU } B\big)$.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	NON A	$A \Rightarrow B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

On dit que A est une <u>condition suffisante</u> à B ou que B est une <u>condition nécessaire</u> à A.

Exemple 30. Notons A : « x est un multiple de 6 » et B : « x est un multiple de 2 ».
Alors, $A \Rightarrow B$ est vraie. En revanche, la proposition $B \Rightarrow A$ est fausse.

Remarque 31. Si $A \Rightarrow B$ est vraie, cela ne veut pas dire que A est **tout le temps** vrai.

Exemple 32. Quand je dis "s'il fait beau dehors alors je mets mes lunettes de soleil", quel temps fait-il dehors ?

Définition 33.

Soient A et B deux propositions.
<u>La réciproque</u> de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$.

Exemple 34. La réciproque de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est
« Si n est un multiple de 2 alors n est un multiple de 6 ».

Définition 35.

Soient A et B deux propositions.
<u>La contraposée</u> de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication NON $B \Rightarrow$ NON A.

Exemple 36. La contraposée de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est la proposition
« Si n n'est pas un multiple de 2 alors n n'est pas un multiple de 6 ».

Théorème 37.

Soient A et B deux propositions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ ne sont pas toujours équivalentes.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NON A sont toujours équivalentes.

Définition 38.

Soient A et B deux propositions mathématiques.
Le connecteur logique $\underline{\Leftrightarrow}$ est défini par $A \Leftrightarrow B \equiv \big((A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow A)\big)$.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple 39. Pour trois réels positifs a, b et c, un triangle de côtés de longueur a, b et c est rectangle si, et seulement si, $a^2 + b^2 = c^2$.

Théorème 40.

Soient A et B deux propositions mathématiques.

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \equiv (A \equiv B)$$

2.4 Quantificateurs et opérations logiques.

Théorème 41.

Soit $A(x)$ une proposition portant sur un réel x.

1. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que NON $A(x)$ ».
2. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $A(x)$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},$ NON $A(x)$ ».

Théorème 42.

Soient $A(x, y)$ une proposition portant sur deux réels x et y.
La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $A(x, y)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},$ NON $A(x, y)$ ».

3 Différents modes de raisonnement.

3.1 Raisonnement par récurrence.

Il s'agit d'un raisonnement qui convient pour démontrer que propositions de la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
$$\forall n \geq n_0,\ P(n).$$

Théorème 43.

Soit P une proposition définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, la propriété P est vraie sur $\mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.

Exemple 44. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 45. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n - 1$ est un multiple de 9.

Remarque 46. Il se peut que $P(n)$ ne suffise pas pour obtenir $P(n+1)$. On fait alors une **récurrence double**.

Théorème 47.

Soient P une proposition définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n)$ ET $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$

Alors, la propriété P est vraie sur tout $\mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.

Exemple 48. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

3.2 Démontrer une proposition qui commence par $\forall$.

Exemple 49. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

On doit démontrer que pour tous les éléments d'un ensemble la propriété est vraie.

- Démonstration générale.
  On choisit un élément de E sans aucune autre contrainte : soit $x \in E$ fixé quelconque.
  On montre qu'il vérifie la propriété. C'est le même argument pour tous les éléments de E.
- Partition de E.
  On découpe l'ensemble E en plusieurs sous-ensembles : $E_1,\ E_2,\ \ldots$.
  On montre que la propriété est vraie en utilisant un argument différent pour chaque partie de E.

3.3 Trouver un contre-exemple.

Lorsqu'on veut démontrer qu'une assertion de la forme "$\forall x \in E, \ldots$" est fausse, on utilise un contre-exemple.

Exemple 50. On s'intéresse à la proposition suivante :
Tout entier naturel non nul est la somme de trois carrés d'entiers naturels.

1. Traduire cet énoncé avec des quantificateurs.
2. Démontrer qu'il est faux.

3.4 Démontrer une proposition qui commence par $\exists$.

On doit justifier l'existence d'un élément qui vérifie la propriété souhaitée.

- Construction de l'élément.
  Par un raisonnement d'analyse-synthèse (voir TD), on construit un élément qui convient.
- Utilisation de théorème.
  On applique un théorème du cours dont la conclusion est l'existence d'un élément qui convient.

Exemple 51. Justifier qu'il existe un réel x tel que $x^3 = 1 - x$.

3.5 Démontrer une implication.

Methode 1.

Pour démontrer une implication de la forme $A \Rightarrow B$,

- On suppose que la proposition A est vraie
- On montre que A_1, qui implique A_2, ...
- on démontre que la proposition B est vraie.

Exemple 52. Démontrer que Si 6 divise n alors n est pair.

Théorème 53.

Soient A et B deux propositions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NONA sont équivalentes.

Exemple 54. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair .

3.6 Démontrer une équivalence.

Methode 2.

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on a deux options :

- on montre une double implication $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
- on montre que A est équivalente à A_1, qui est équivalente à A_2, ..., qui est équivalente à B.

Exemple 55. Démontrer qu'un produit de deux entiers est impair si, et seulement si, les deux entiers sont impairs.

3.7 Démonstration par l'absurde.

On suppose qu'une certaine propriété est fausse et on arrive à une contradiction.
On en déduit que la proposition initiale est vraie.

Exemple 56. Démontrer, par l'absurde, que 0 n'a pas d'inverse.