BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°1

Vendredi 12 septembre 2025

– Calculs, Nombres Réels et Trigonométrie. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.
N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

1. Simplifier $A = \dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$.
2. Simplifier $B = \dfrac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x+2| = 3$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $|3x-2| < 5$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2(x) = \dfrac{3}{4}$
7. (a) Montrer que $3 - 2\sqrt{2} > 0$.
   (b) Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
   (c) En déduire les solutions réelles de l'équation $\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 2\sqrt{2} + 1 = 0$.
   On donnera les solutions sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2 - Suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci (mathématicien italien également connu sous le nom de Léonard de Pise, 1170-1250) est la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

1. Calculer les 9 premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite de Fibonacci est à valeurs entières strictement positives à l'exception du premier terme (on pourra raisonner par récurrence sur $\mathbb{N}^*$).
3. Soient r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$, r_1 étant la plus grande. Expliciter r_1 et r_2.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $r_1^n + r_1^{n+1} = r_1^{n+2}$. Donner ensuite sans démonstration une relation du même type satisfaite par r_2.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r_1^n - r_2^n\right)$.

Exercice 3 - Racines cubiques.

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.
On propose de simplifier l'expression de α et β.

1. On rappelle que pour tout réel a, il existe un unique réel appelé "racine cubique de a", et noté $\sqrt[3]{a}$ solution de l'équation $x^3 = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Déterminer $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$.
2. (a) Calculer $\alpha^3 + \beta^3$ et $\alpha\beta$
   (b) Développer $(\alpha+\beta)^3$
   (c) En déduire une expression simple de $(\alpha+\beta)^3$ en fonction de α et β.
3. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) À l'aide de la question précédente, montrer que u est une racine de P, c'est à dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une racine évidente de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question précédente.
   (e) En déduire la valeur de u.
4. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto (x-\alpha)(x-\beta)$.
   (a) À l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$, pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire que α et β sont les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   (c) Déterminer des expressions plus simples de α et β