Corrigé du devoir surveillé n° 1

— 12 septembre 2025—

Exercice 1

1. $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{3^{-3}\times 2^4}{3^{-4}\times 2^4} = 3^{-3-(-4)} = \boxed{3}$.

2. $\dfrac{(3^2\times(-2)^4)^8}{((-3)^5\times 2^3)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\times 2^{32}}{3^{-10}\times 2^{-6}} = \boxed{3^{26}\times 2^{38}}$.

3.
$$\begin{aligned} |x+2| = 3 &\iff x+2 = 3 \text{ ou } x+2 = -3 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{1,-5\}.}$

4.
$$\begin{aligned} |3x-2| < 5 &\iff -5 < 3x-2 < 5 \\ &\iff -3 < 3x < 7 \\ &\iff -1 < x < \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left]-1,\frac{7}{3}\right[.}$

5.
$$\begin{aligned} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sin(x) = \sin\tfrac{\pi}{4} \\ &\iff x = \frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\}}$.

6.
$$\begin{aligned} \cos^2(x) = \frac{3}{4} &\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{6}) \text{ ou } \cos(x) = \cos(\frac{5\pi}{6}) \\ &\iff x = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi,-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}}$.

7. (a) $0<8<9$ donc $\sqrt{8}<\sqrt{9}$, donc $2\sqrt{2}<3$. Ainsi, $\boxed{3-2\sqrt{2}>0}$.

   (b) Ce sont deux réels positifs. On va comparer leurs carrés.
   Puisque $3-2\sqrt{2}>0$ alors $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$.
   Par identité remarquable, $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$.
   Par passage à la racine carré, $\boxed{\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1}$.

   (c) C'est une équation de second degré. On calcule le discriminant.
   $\Delta = 4-4\times\dfrac{1}{4}\times(2\sqrt{2}+1) = 3-2\sqrt{2}>0$.
   Il y a donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\frac{2}{4}} = 2(-2+\sqrt{2}-1) = \boxed{-6+2\sqrt{2}}$ et
   $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\frac{2}{4}} = 2(-2-\sqrt{2}+1) = \boxed{-2-2\sqrt{2}}$.
   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left\{-6+2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2}\right\}}$.

Exercice 2.

1. $\boxed{u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \ , \ u_2 = 1 \ , \ u_3 = 2 \ , \ u_4 = 3 \ , \ u_5 = 5 \ , \ u_6 = 8 \ , \ u_7 = 13 \ , \ u_8 = 21}$.

2. Montrons par récurrence que les termes de la suite sont à valeurs entières strictement positives, excepté le premier terme.

   - Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définissons la propriété : $\mathcal{P}(n)$ «$u_n \in \mathbb{N}^*$ ».
   - $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies car $u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $u_2 = u_0 + u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.
     On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n \in \mathbb{N}^*$ et d'après $\mathcal{P}(n+1)$, $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$, donc leur somme est aussi un nombre entier strictement positif. On en déduit que $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On en déduit que les termes de la suite sont à valeurs entières strictement positives, excepté le premier terme (qui est nul).

3. Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$.
   Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux racines réelles r_1 et r_2 :

$$\boxed{r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

   (r_1 est bien la plus grande des deux.)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
   Puisque r_1 est racine de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, elle vérifie $r_1^2 = r_1 + 1$. En multipliant les deux membres de cette égalité par r_1^n, on obtient $\boxed{r_1^{n+1} + r_1^n = r_1^{n+2}.}$.
   On peut appliquer ce raisonnement à r_2 qui est racine de la même équation. D'où $\boxed{r_2^{n+1} + r_2^n = r_2^{n+2}.}$.

5. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la propriété : $\mathcal{P}(n)$: «$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$».
   - (I) : $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^0 - r_2^0) = 0$ et $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie .
     $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^1 - r_2^1) = 1$ et $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - (H) : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.
     On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on peut remplacer u_n et u_{n+1} par leurs expressions en fonction de r_1, r_2 et n. D'où

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} + r_1^n - (r_2^{n+1} + r_2^n)) \end{aligned}$$

     or nous avons vu à la question précédente que $r_1^{n+1} + r_1^n = r_1^{n+2}$ et $r_2^{n+1} + r_2^n = r_2^{n+2}$, d'où :

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}),$$

     on en déduit que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n).$$

Exercice 3.

1. $\sqrt[3]{1} = \mathbf{1}$ car $\mathbf{1}^3 = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)^3 = -1$, $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$, $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = 27$.

2. (a) $\alpha^3 + \beta^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$ et $\alpha\beta = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{2^2 - 5} = \sqrt[3]{-1} = -1$.
   Donc $\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = 4 \text{ et } \alpha\beta = -1}$.

(b) D'après la formule du binôme, $\boxed{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}$.

(c) On en déduit : $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4 - 3(\alpha+\beta)$. Donc $\boxed{(\alpha+\beta)^3 = 4 - 3(\alpha+\beta)}$.

3. (a) Calculons $P(u)$: $P(u) = P(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^3 + 3(\alpha+\beta) - 4 = 0$ d'après la question précédente. $\boxed{\text{Donc } u \text{ est racine de } P}$.

(b) On constate que $P(1) = 0$. Donc $\boxed{1 \text{ est racine évidente de } P}$.

(c) Puisque 1 est racine de P et que P est de degré 3, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
Développons le produit $(x-1)(ax^2+bx+c)$: $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ x^3+3x-4 = (x-1)(ax^2+bx+c) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ x^3+3x-4 = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \\ b-a = 0 \\ c-b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \quad \text{(par identification)} \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(x^2+x+4)}$.

(d) Résolvons l'équation $\mathcal{E}$: $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 &\iff (x-1)(x^2+x+4) = 0 \text{ d'après la question précédente} \\
&\iff x-1 = 0 \text{ ou } x^2+x+4 = 0 (\mathcal{E}') \\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

En effet, l'équation $\mathcal{E}'$ est une équation du second degré de discriminant $-15 < 0$ donc elle n'a pas de solution réelle.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } P(x) = 0 \text{ est } \{1\}}$.

(e) Nous avons vu que u est une racine de P.
Or P a une unique racine réelle qui est 1.
Puisque u est un nombre réel, on en déduit que u est l'unique racine de P. $\boxed{\text{Donc } u = 1}$.

4. (a) Développons : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$.
Or nous savons (d'après les questions précédentes) que $\alpha + \beta = u = 1$ et que $\alpha\beta = -1$.
$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - x - 1}$.

(b) D'après la définition de Q ($Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$), les racines de Q sont α et β. Donc α et β sont les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

(c) Le discriminant du trinôme $x^2 - x - 1$ vaut 5 : Q a donc deux racines qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Or $\alpha > 0 > \beta$. On en déduit $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.
Remarque : On peut vérifier par exemple que $\alpha^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} = 2 + \sqrt{5}$