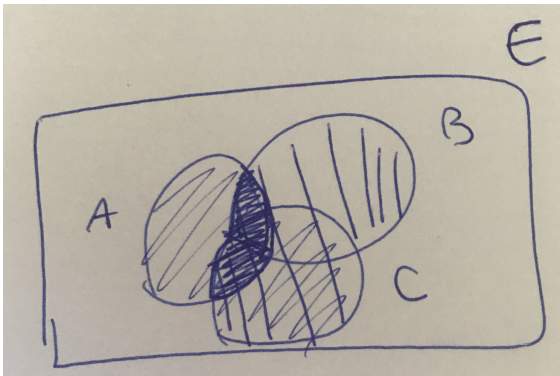

Corrigé du devoir surveillé du samedi 25 septembre 2021

Exercice 1:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
 - (a) $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$
 - (b) $\forall k \in \mathbb{Z}, n \neq 8k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose n impair.
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$.
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$.
 $\Rightarrow \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z}, n^2 - 1 = 4 \cdot 2\tilde{k} = 8\tilde{k}$.
Donc, 8 divise $n^2 - 1$.
3. La réciproque de l'implication est : n est pair $\Rightarrow n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8.
Soit n un entier pair. $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$.
 $\Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 - 1 = 4k^2 - 2 + 1 = 2(2k^2 - 1) + 1$.
 $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, n^2 - 1 = 2K + 1$.
Donc, $n^2 - 1$ est impair. En particulier, il n'est pas divisible par 8.
Donc, la réciproque est vraie.

Exercice 2:

1.



2. (a) On peut écrire $14 = \sqrt{14}^2 - 0^2$ donc $14 \in A$.
(b) On peut écrire $-25 = 0^2 - 5^2$ donc $-25 \in A$.
(c) On peut aussi montrer que $A = \mathbb{R}$ par double inclusion.
 - Soit $a \in A$. Par définition, $a \in \mathbb{R}$ donc $A \subset \mathbb{R}$.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, on peut écrire $x = (\sqrt{x})^2 - 0^2$ donc $x \in A$.
Si $x < 0$, on peut écrire $x = 0^2 - (\sqrt{-x})^2$ donc $x \in A$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A$. Donc, $\mathbb{R} \subset A$.Par double inclusion, $\mathbb{R} = A$.

Exercice 3:

1. Questions préliminaires :
 - (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. La contraposée de P est

$$"\exists n \in \mathbb{N}^*, \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0 \Rightarrow \sin(a) = 0"$$

On raisonne par contraposée donc on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{a}{2^n} = k\pi \Rightarrow a = 2^n k\pi \Rightarrow \sin(a) = 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

Si on l'applique à $x = \frac{a}{2^{n+1}}$, on obtient $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)},$$

- Initialisation : Pour $n = 1$.

$$\sin(a) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sin(a)}{2 \sin\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Donc, $P(1)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

On utilise la même formule de trigonométrie : $\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}$.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) &= \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \\ &= \frac{\sin(a)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \end{aligned}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

Exercice 4:

1. $\sqrt[3]{1} = 1$ car $1^3 = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)^3 = -1$, $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$, $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.

2. (a) $\alpha^3 + \beta^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$ et $\alpha\beta = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \sqrt[3]{2^2 - 5} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Donc $\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = 4 \text{ et } \alpha\beta = -1}$.

(b) D'après la formule du binôme, $\boxed{(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}$.

(c) On en déduit : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 - 3(\alpha + \beta)$. Donc $\boxed{(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)}$.

3. (a) Calculons $P(u)$: $P(u) = P(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^3 + 3(\alpha + \beta) - 4 = 0$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{Donc } u \text{ est racine de } P}$.

(b) On constate que $P(1) = 0$. Donc $\boxed{1 \text{ est racine évidente de } P}$.

(c) Puisque 1 est racine de P et que P est de degré 3, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Développons le produit $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$: $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 3x - 4 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \iff \forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 3x - 4 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \quad (\text{par identification}) \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(x^2+x+4)}.$$

(d) Résolvons l'équation $\mathcal{E} : P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff (x-1)(x^2+x+4) = 0 \text{ d'après la question précédente} \\ &\iff x-1 = 0 \text{ ou } x^2+x+4 = 0 (\mathcal{E}') \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

En effet, l'équation $\mathcal{E}'$ est une équation du second degré de discriminant $-15 < 0$ donc elle n'a pas de solution réelle.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } P(x) = 0 \text{ est } \{1\}}.$

(e) Nous avons vu que u est une racine de P .

Or P a une unique racine réelle qui est 1.

Puisque u est un nombre réel, on en déduit que u est l'unique racine de P . $\boxed{\text{Donc } u = 1}.$

4. (a) Développons : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

Or nous savons (d'après les questions précédentes) que $\alpha + \beta = u = 1$ et que $\alpha\beta = -1$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = x^2 - x - 1}.$$

(b) D'après la définition de Q ($Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$), les racines de Q sont α et β . Donc α et β sont les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

(c) Le discriminant du trinôme $x^2 - x - 1$ vaut 5 : Q a donc deux racines qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Or $\alpha > 0 > \beta$. On en déduit $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$

Remarque : On peut vérifier par exemple que $\alpha^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} = 2 + \sqrt{5}$