BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°1

Samedi 25 septembre 2021

– Manipulation des Nombres Réels –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.**Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

1. Pour un entier n donné, écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) L'entier n est pair.
   (b) L'entier n n'est pas divisible par 8.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, par contraposée, l'implication suivante :
$$\mathrm{I} : n^2 - 1 \text{ n'est pas un multiple de } 8 \Rightarrow n \text{ est pair.}$$
3. Que pensez-vous de la réciproque ?
   On commencera par énoncer clairement la réciproque de I et on remarquera que
   $\forall k \in \mathbb{Z},\ 4k^2 - 1 = 4k^2 - 2 + 1$.

Exercice 2

1. Soit E un ensemble. Soient $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer **à l'aide d'un dessin** que
$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$
2. Soit $A = \{x^2 - y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
   (a) Montrer que 14 appartient à A.
   (b) Montrer que -25 appartient à A.

Exercice 3.

1. Questions préliminaires :
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer, par un raisonnement par contraposition, la proposition P suivante :
$$\mathrm{P} : \text{"} \sin(a) \neq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0 \text{"}$$
   On commencera par exprimer clairement la contraposée de P.
   (b) Rappeler la formule de trigonométrie donnant $\sin(2x)$ pour tout réel x et l'appliquer pour $x = \frac{a}{2^{n+1}}$. On simplifiera les fractions au maximum.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \ldots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

Tournez s'il vous plait

Exercice 4.

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On propose de simplifier l'expression de α et β.

1. On rappelle que pour tout réel a, il existe un unique réel appelé "racine cubique de a", et noté $\sqrt[3]{a}$ solution de l'équation $x^3 = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Exemples : déterminer

$$\sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{-27}$$

2. (a) Calculer $\alpha^3+\beta^3$ et $\alpha\beta$
   (b) Développer $(\alpha+\beta)^3$
   (c) En déduire une expression simple de $(\alpha+\beta)^3$ en fonction de α et β.
3. On pose $u = \alpha+\beta$ et on considère la fonction polynomiale $\mathrm{P} : x \mapsto x^3+3x-4$.
   (a) À l'aide de la question précédente, montrer que u est une racine de P, c'est à dire que $\mathrm{P}(u) = 0$.
   (b) Trouver une racine évidente de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
   (d) Résoudre l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question précédente.
   (e) En déduire la valeur de u.
4. On considère la fonction polynomiale $\mathrm{Q} : x \mapsto (x-\alpha)(x-\beta)$.
   (a) À l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $\mathrm{Q}(x)$, pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire que α et β sont les racines de l'équation $x^2-x-1=0$.
   (c) Déterminer des expressions plus simples de α et β