Chapitre 05 : Etude de fonctions

Table des matières

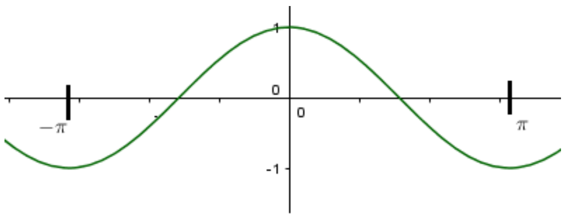
1 Fonctions trigonométriques

1.1 Fonction cosinus

Théorème 1.

La fonction cos est paire, $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

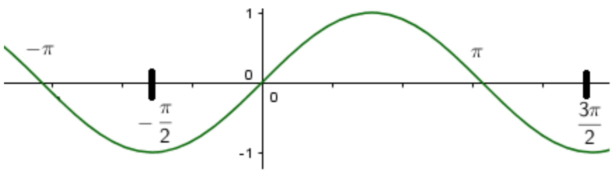


1.2 Fonction sinus

Théorème 2.

La fonction sin est impaire, $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$.

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



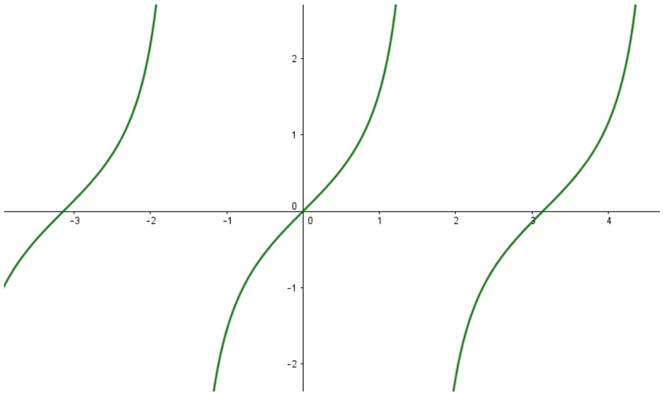
1.3 Fonction tangente

Théorème 3.

La fonction $\tan := \dfrac{\sin}{\cos}$ est impaire, $\pi-$périodique et définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Elle est continue et dérivable sur et $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$



2 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

2.1 Fonction exponentielle

Théorème 4.

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On la note $x \mapsto \exp(x)$ ou encore $x \mapsto \mathbf{e}^x$.

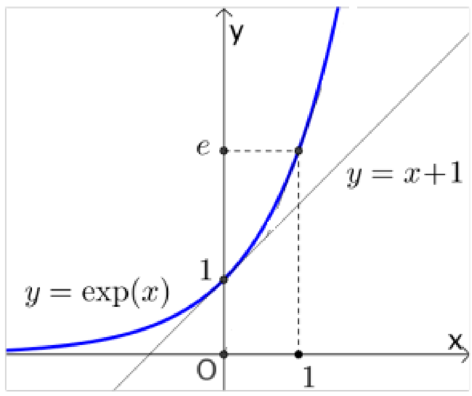
Théorème 5.

1. La fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \mapsto +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Exemple 7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x \geq x + 1$.

Théorème 8 (Propriétés fonctionnelles).

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \mathbf{e}^{x+y}=\mathbf{e}^x.\mathbf{e}^y \qquad \mathbf{e}^{-x}=\frac{1}{\mathbf{e}^x} \qquad \mathbf{e}^{x-y}=\frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{e}^{nx}=(\mathbf{e}^x)^n$$
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathbf{e}^{xy}=(\mathbf{e}^x)^y.$$

Exemple 9. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathbf{e}^{-2x}$.

2.2 Fonction logarithme népérien

Définition 10.

On appelle logarithme népérien et on note ln l'unique primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Définition 11.

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ f(1)=0 \end{cases}$

On la note ln pour logarithme népérien.

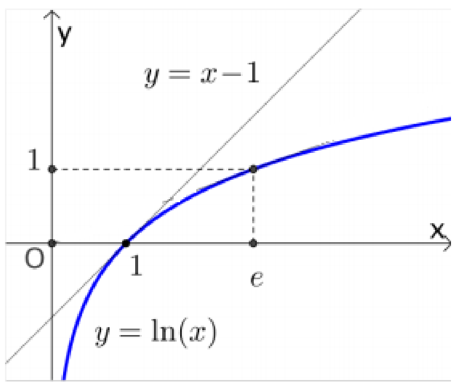
Théorème 12.

1. La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.
2. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 13.

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\ln(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x)=+\infty.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	1	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 14 (Propriétés fonctionnelles).

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \;\; \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Théorème 15.

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \ln(x^n) = n\ln(x)$$

3 Généralités sur les fonctions

3.1 Ensemble de définition et graphe d'une fonction

Définition 16.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle domaine de définition de f le sous-espace de $\mathbb{R}$ pour lequel la fonction f est bien définie. On le note D_f.

On appelle graphe de f les points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, f(x))$.

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ avec } x \in D_f\}$$

Exemple 17. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.2 Parité d'une fonction

Définition 18.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $D_f =]-a, a[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

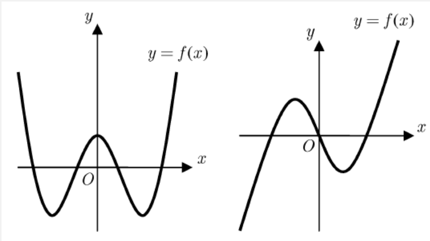
- La fonction f est paire lorsque $\forall x \in D_f, \;\; f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est impaire lorsque $\forall x \in D_f, \;\; f(-x) = -f(x)$.

Exemple 19. Etudier la parité de $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Théorème 20.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $D_f =]-a, a[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
2. Si f est impaire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.



Dans les deux cas, il suffit d'étudier f sur $[0, a[$.

3.3 Périodicité d'une fonction

Définition 21.

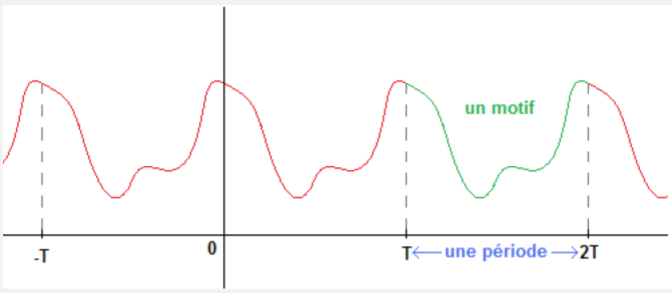
Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}^*$.
La fonction f est <u>$T-$périodique</u> lorsque que $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$. Le réel T est appelé <u>une période</u> de f.

Exemple 22. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

Exemple 23. Etudier la périodicité de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Théorème 24.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est $T-$périodique alors son graphe $\mathcal{C}_f$ s'obtient par une infinité de translation de son graphe réduit à un ensemble de longueur T.



Il suffit alors d'étudier f sur une période $[0; T[$.

Exemple 25. Sur quel ensemble doit-on étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 1$?

4 Dérivée et variations d'une fonction

4.1 Justifier la dérivabilité

Théorème 26.

1. Les fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition : polynômes, fractions rationnelles, sinus, cosinus, tangente, exponentielle et logarithme.
2. Les fonctions valeur absolue, partie entière ou racine carrée ne sont pas dérivables sur tout leur ensemble de définition.

4.2 Fonctions dérivées usuelles

Théorème 27.

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	
$x \mapsto \mathbf{e}^x$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

4.3 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Définition 28.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans D_f.

- La fonction est <u>croissante sur I</u> lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- La fonction est <u>décroissante sur I</u> lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Une fonction croissante ou décroissante sur I est <u>monotone sur I</u>.

Théorème 29.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $I \subset D_f$ tel que f soit dérivable sur I.

1. f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
2. f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
3. f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Exemple 30. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x$.

4.4 Fonctions minorées, majorées et bornées

Définition 31.

Soit f une fonction définie sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset D_f$.
On dit que f est minorée sur A lorsque

$$\exists\, m \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in A\ ,\ m \leq f(x).$$

m est un minorant de f sur A.
On dit que f est majorée sur A lorsque

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in A\ ,\ f(x) \leq M.$$

m est un majorant de f sur A.
On dit que f est bornée sur A lorsque

$$\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall x \in A\ ,\ m \leq f(x) \leq M.$$

Exemple 32. Tracer le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x - 5$ et en déduire que la fonction f est majorée sur $]-\infty, 2]$.

Définition 33.

Soit f une fonction définie sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D_f$.
On dit que f admet un minimum en x_0 lorsque

$$\forall x \in D_f\ ,\ f(x_0) \leq f(x).$$

On dit que f admet un maximum en x_0 lorsque

$$\forall x \in D_f\ ,\ f(x_0) \geq f(x).$$

4.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 34.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

1. La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g+fg'$.
3. Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
4. Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Exemple 35. Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée.

4.6 Dérivation d'une composé de fonctions

Définition 36.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit u définie sur I à valeurs dans J. Soit $g : J \to \mathbb{R}$.
On appelle composé de u par g la fonction notée $g \circ u$ et définie par

$$g \circ u : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g\big(u(x)\big) \end{array} \right.$$

Exemple 37. Soient f et g les fonctions définies par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2-1$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Théorème 38.

Soit u une fonction dérivable sur I.

Fonction	Dérivée
$x \mapsto (u(x))^2$	
$x \mapsto (u(x))^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	
$x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$	
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	

Fonction	Dérivée
$x \mapsto \mathbf{e}^{u(x)}$	
$x \mapsto \ln(u(x))$	
$x \mapsto \sin(u(x))$	
$x \mapsto \cos(u(x))$	

Théorème 39.

Soient $u : I \to J$ dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J.
La fonction $g \circ u$ est dérivable sur I et $(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$.

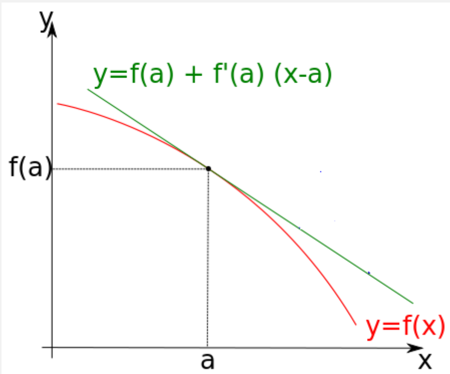
Exemple 40. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 41. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \ln(2x)$.

4.7 Equation de la tangente

Théorème 42.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $a \in D_f$.
Si f est dérivable en a alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est tangente à la courbe C_f au point $(a, f(a))$.



Remarque 43. L'étude du signe de la fonction $x \to f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$ permet ensuite de déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente.

5 Limites et asymptotes

5.1 Limites aux bords de l'ensemble de définition

Théorème 44.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 45. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$.

Théorème 46.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \times g(x)\big)$ selon les valeurs des limites de f et de g.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Forme Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	**Forme Ind.**	0	0	0	**Forme Ind.**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 47.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$\ell < 0$	0^+	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	**F.I.**	**F.I.**	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	**F.I.**	**F.I.**	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemple 48. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 - 1}$.

5.2 Croissance comparée

Théorème 49.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\mapsto-\infty} x^\alpha \mathbf{e}^x = 0.$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\mapsto 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Exemple 50. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = 3x\mathbf{e}^{-x^2}$.

5.3 Limites par comparaison

Théorème 51.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que

1. Au voisinage de a, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
2. Les fonctions f et g admettent des limites **finies** en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction h admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Exemple 52. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}$ en $+\infty$.

Théorème 53.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que , au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 54. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$.

5.4 Asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$

Définition 55.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $a \notin D_f$.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \pm\infty$$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Exemple 56. Etudier les différentes asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x+4}$.

6 Fonctions exponentielle et logarithme en base quelconque

6.1 Fonctions logarithme décimal

Définition 57.

On appelle logarithme décimal et on note $x \mapsto \log(x)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Théorème 58.

1. La fonction log est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \log'(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)}$.
2. La fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \log(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto +\infty} \log(x) = +\infty$$

6.2 Fonction exponentielle en base quelconque

Définition 59.

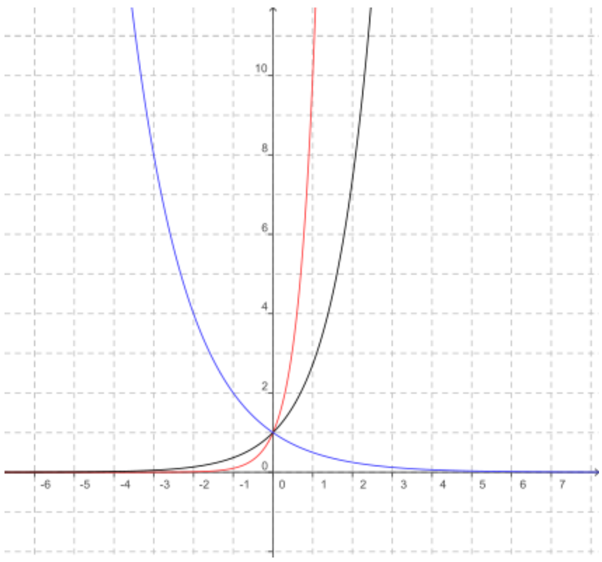
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(x\ln(a))$. Par convention, on note $a^x = \exp(x\ln(a))$.

Pour $0 < a < 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	1	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Pour $a > 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	1	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 60.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. La fonction $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (a^x)' = \ln(a)a^x$.
3. La fonction $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R} \text{ si } 0 < a < 1. \\ \text{constante sur } \mathbb{R} \text{ si } a = 1. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ si } a > 1. \end{cases}$

Théorème 61.

$$\lim_{x \mapsto -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ pour } 0 < a < 1 \\ 0 \text{ pour } a > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < a < 1 \\ +\infty \text{ pour } a > 1 \end{cases}$$

Théorème 62.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*. \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^{x+y} = a^x.a^y \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad a^{xy} = (a^x)^y$$

6.3 Fonctions puissances

Définition 63.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \exp(\alpha \ln(x))$

Par convention, on note $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Théorème 64.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^\alpha)' = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} \text{ pour } \alpha \neq 0 \end{cases}$
3. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha < 0. \\ \text{constante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha = 0. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha > 0. \end{cases}$

Théorème 65.

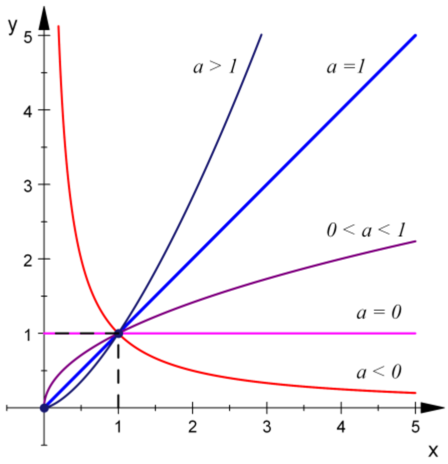
$$\lim_{x \mapsto 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ pour } \alpha < 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha < 0 \\ +\infty \text{ pour } \alpha > 0 \end{cases}$$

Pour $\alpha < 0$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	1	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Pour $a > 0$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	1	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Exemple 66. Étudier en détail la fonction $x \mapsto x^x$.