Exercice 1 Déterminer les limites suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \mathbf{e}^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3x\mathbf{e}^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
10. $f(x) = \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x+5}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x^5-x}{x^2-1} = x^3.\dfrac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\mathbf{e}^x - 2x + 1 = \mathbf{e}^x\left(1 - 2\dfrac{x}{\mathbf{e}^x} + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}\right)$.
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3x\mathbf{e}^{-x^2} = 3.\dfrac{-x^2\mathbf{e}^{-x^2}}{-x}$.
   Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2\mathbf{e}^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1} = \dfrac{1+\mathbf{e}^{-x}}{1-\mathbf{e}^{-x}}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
   $\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}+\sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}) = 0}$.
7. On applique la même méthode.
   $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) = 1}$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}| \leq \mathbf{e}^{-3x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x} = 0}$.
9. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}\right| \leq \dfrac{|x|}{x^2+1}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1} = 0}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 \leq x-\sin(x) \Rightarrow \mathbf{e}^{x-1} \leq \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ par croissante sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.
    Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-\sin(x)} = +\infty}$.

Exercice 2 Après avoir donné leur ensemble de définition et justifié leur dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x\mathbf{e}^{-x^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x)$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2+3}$.
4. $f(x) = \dfrac{1+\sin(2x)}{\cos(x)-3}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.
6. $f(x) = \ln(2+\cos(x))$
7. $g(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$
8. $h(x) = \sqrt{1+\ln(1-x)}$
9. $l(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathbf{e}^{-x^2} + x.(-2x)\mathbf{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathbf{e}^{-x^2}$$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{2}.2\cos(2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x)$$
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x(x^2+3) - \mathbf{e}^x.2x}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2-2x+3)\mathbf{e}^x}{(x^2+3)^2}$$
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{2\cos(2x)(\cos(x)-3) - (1+\sin(2x).(-\sin(x))}{(\cos(x)-3)^2}\\ &= = \frac{2\cos(2x)\cos(x) - 6\cos(2x) + \sin(x) - \sin(2x)\sin(x)}{(\cos(x)-3)^2}\end{aligned}$$
5. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1,+\infty[$ et la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, la fonction $u : x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}.x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$
6. $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ 2+\cos(x) > 0\}$. Or,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1\\ ,\ 1 \leq 2+\cos(x) \leq 3\end{aligned}$$
donc $D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1,3]$ et d'une fonction dérivable sur $[1,3]$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x) \times \frac{1}{2+\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
7. $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{2}{x^3}\mathbf{e}^{\frac{-1}{x^2}}$$

8.

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R},\ 1-x>0 \text{ et } 1+\ln(1-x)\geq 0\} = \{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } \ln(1-x)\geq -1\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } 1-x\geq \mathbf{e}^{-1}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } x\leq 1-\mathbf{e}^{-1}\right\} \\ D_h &=]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}] \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[$ comme composée de la fonction $x\mapsto 1+\ln(1-x)$ dérivable sur $]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et

$$\forall x\in]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[,\ h'(x)=\frac{-1}{1-x}\times\frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1-x)}}=\frac{1}{2(x-1)\sqrt{1+\ln(1-x)}}$$

9. $D_l=\{x\in\mathbb{R},\ x>0 \text{ et } \ln(x)>0\}=\{x\in\mathbb{R},\ x>0 \text{ et } x>1\}=]1,+\infty[$.
La fonction l est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée de la fonction $x\mapsto\ln(x)$ dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x\mapsto\ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ l'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{x\ln(x)}$$

Remarque : Ceci nous dit aussi que la fonction $x\mapsto\ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$.

Exercice 3 Soit $g : x\mapsto\dfrac{2x^3-2x-1}{x^3-1}$

1. Etudier la branche infinie de la fonction g.
Correction On est face à une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va modifier l'écriture de $g(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

$$\forall x>1,\ g(x)=\frac{x^3(2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})}=\frac{2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ donc par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$.
On a également $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=2$.
La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe de g.

2. Déterminer la position de la courbe représentative de g par rapport à la branche infinie.
Correction Pour avoir la position de la courbe par rapport à son asymptote, on doit étudier le signe de la quantité $g(x)-2$ pour $x\in\mathbb{R}$.

$$\forall x>1,\ g(x)-2=\frac{-2x+1}{x^3-1}$$

On construit alors le tableau de signe du quotient.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
x^3-1		$-$		$-$	0	$-$	
$g(x)-2$		$-$		$+$	$\Vert$	$-$	

Donc, la courbe représentative de g est au-dessus de la tangente sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et en-dessous sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\subset]1, +\infty[$.

Exercice 4 Pour chacune des fonctions, étudier la parité et donner son intervalle d'étude.

1. $x \mapsto \ln(|x|)$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(|-x|) = \ln(|x|)$.
   Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
2. $x \mapsto \sin(x^2)$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin((-x^2) = \sin(x^2)$.
   Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
3. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^3+x}$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^3-x} = \dfrac{x^2-1}{-(x^3+x)} = -\dfrac{x^2-1}{x^3+x}$.
   Donc la fonction est impaire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier la monotonie de $f+g$.
   Correction Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.
   $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.
   $\Rightarrow f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$ par addition d'inégalités.
   Donc $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si f et g sont à valeurs positives, étudier la monotonie de $f \times g$.
   Correction On suppose maintenant que f et g sont à valeurs positives.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.
   $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.
   $\Rightarrow f(x).g(x) \leq f(y).g(y)$ par produit d'inégalités.
   Donc fg est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la fonction $g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$
   Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2 > 0\}$.

   Or, $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$ donc $D_{g\circ f} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

   $$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[,\ g \circ f(x) = \ln(x^2 - 2).$$

2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2x + 3 > 0\}$.

   Or, $\Delta > 0$ et $f(0) = 3$ donc f est toujours strictement positive.
   Donc, $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Exercice 7 On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 0$ des fonctions f et g sont parallèles.
   Correction Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

   Donc, $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$.
   Les tangentes en 0 ont donc le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 1$ sont sécantes.
   Correction $f'(1) = 1$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de f est $y = (x-1)+\dfrac{3}{2}$.
   $g'(1) = \dfrac{-1}{2}$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de g est $y = \dfrac{-1}{2}(x-1)+1$.
   On cherche un point d'intersection entre les deux droites.

$$(x-1)+\frac{3}{2} = \frac{-1}{2}(x-1)+1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

   Donc les deux tangentes sont sécantes en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{6}\right)$.

Correction

Exercice 8 Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$.

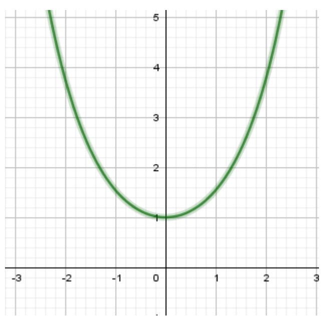
1. Donner l'ensemble de définition de f.
   Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ?
   Correction La fonctions f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Elle est paire donc on peut les étudier sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer les variations de la fonction f.
   Correction La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$$

   On étudie ensuite le signe de la dérivée. Sot $x \in \mathbb{R}$.

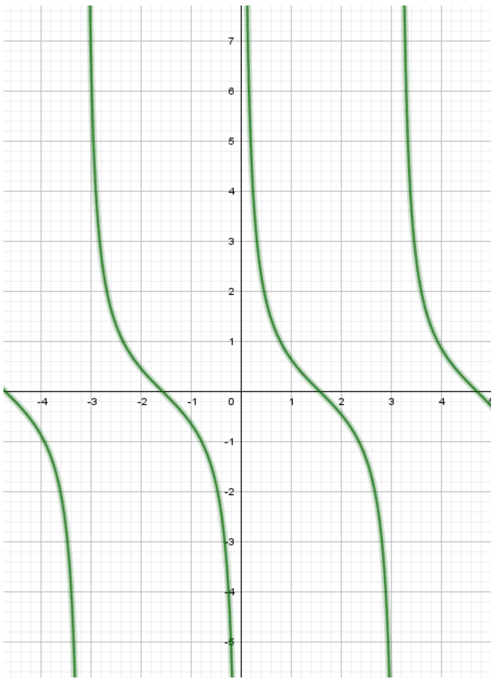
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geq \mathbf{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

   Finalement, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Calculer les limites de f aux bords de son ensemble de définition et tracer son graphe.
   Correction Par samme de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



Exercice 9 Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
   Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? On notera cet ensemble $\mathcal{D}$.
   Correction $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   La fonction g est impaire et π−périodique. On peut réduire l'ensemble d'étude à $\mathcal{D} = \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathcal{D}$.
   Correction La fonction g est dérivable sur D_g comme quotient de deux fonctions dérivables sur D_g avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
   $$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$
   La fonction g est décroissante sur $\mathcal{D}$.
3. Calculer les limites de g aux bords de $\mathcal{D}$ et tracer son graphe.
   Correction Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.



Exercice 10 Résoudre les équations suivantes.

1. $2\mathbf{e}^{4x} - 5\mathbf{e}^{2x} + 2 = 0$.
   Correction $2\mathbf{e}^{4x} - 5\mathbf{e}^{2x} + 2 = 0$ est équivalente à $2\mathbf{X}^2 - 5\mathbf{X} + 2 = 0$ avec $\mathbf{X} = \mathbf{e}^{2x}$. Résolvons cette équation.
   $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$. Il y a donc 2 racines réelles : $X_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ ou $X_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
   Cela donne deux valeurs possibles pour x : $x_1 = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ ou $x_2 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{\ln(2)}{2}$.
2. $\dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2} = 2$.
   Correction Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x} = 4 \Leftrightarrow \mathbf{e}^{2x} + 1 = 4\mathbf{e}^x \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0$ où $X = \mathbf{e}^x$.
   $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$. Il y a donc deux racines réelles : $X_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ou $X_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.
   Finalement, il y a deux solutions pour x : $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_2 = \ln(2 - \sqrt{3})$.

3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
   Correction Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} = \mathbf{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$ car $x \mapsto \mathbf{e}^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   $\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \dfrac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)\sqrt{x}(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$.
   Donc, 1 et 4 sont les solutions.
4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
   Correction On va modifier l'écriture de cette équation :
   $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow 2^{2x} \times \frac{3}{2} = 3^x \times \frac{4}{\sqrt{3}}$
   $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$. Or, la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3$ donc $x = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 11 Etudier en détail les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
   Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.
   (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.
   (b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$
   Cette dérivée s'annule en $x = \mathbf{e}$. Elle est positive sur $]0; \mathbf{e}]$ et négative sur $]\mathbf{e}; +\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

   (c) Calculons les limites. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\mathbf{e}^0 = 1$. Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
   $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\frac{\ln(\mathbf{e})}{e}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{e}}$.
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}\left(= \frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} = \mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{e}}}$	$\searrow$	1

2. $x \mapsto (x+1)^x$.
   Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto (x+1)^x = \mathbf{e}^{x\ln(x+1)}$.
   (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$.

(b) La fonction $x \mapsto x\ln(x+1)$ est définie sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right] \mathbf{e}^{x\ln(x+1)}$$

On veut étudier de la signe de g : $x \mapsto \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.
Cette fonction est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Elle ne s'annule donc qu'une seule fois. Or, $g(0) = 0$ donc f' ne s'annule qu'en 0.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

(c) Calculons les limites. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$f(0) = \mathbf{e}^0 = 1$.
$\lim\limits_{x\to-1^+} x\ln(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$