Exercice 1. Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

   $\exists\, k \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = k.$

2. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

   $\exists\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x_1) \neq f(x_2).$

3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.

   $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists m \in \mathbb{N},\ \ m > n.$

4. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 1 \Rightarrow x \geq 2.$

5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1.$

6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

   $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 3 \Leftrightarrow n > 2.$

Exercice 2. Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \leq N.$

   $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N.$

2. $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ x = x^2.$

   $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \neq x^2\big) \vee \big(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \neq x_2,\ x_1 = x_1^2 \ \ \wedge \ \ x_2 = x_2^2\big).$

Exercice 3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

   C'est faux. Si on prend $x = 1$ et $y = 2$, on n'a pas $x + y^2 = 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

   C'est faux. Prenons $x = 2$. Si on suppose la proposition vraie, $\exists y \in \mathbb{R},\ 2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = -1$. C'est absurde.

3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

   C'est faux car la fonction $y \mapsto 1 - y^2$ n'est pas constante.

4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

   C'est vrai. Prenons $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 4. Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 6$ divise $5n^3 + n$.

   On raisonne par récurrence.

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : 6 \text{ divise } 5n^3 + n$$

   - Initialisation : Pour $n = 1$, $5n^3 + n = 6$ donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} 5(n+1)^3+n+1 &= 5(n^3+3n^2+3n+1)+n+1 \\ &= 5n^3+n+15n^2+15n+6 \\ &= 5n^3+n+15n(n+1)+6 \end{aligned}$$

Or, 2 divise $n(n+1)$ donc 6 divise $15n(n+1)$.
Par somme, 6 divise $5(n+1)^3+n+1$ et $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

2. Montrer que la propriété "8 divise 9^n+1" est héréditaire.
Que peut-on en conclure ?

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $8|9^n+1$.
$\exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ 9^n+1 = 8k \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ 9^{n+1}+1 = 9(8k-1)+1 = 8(9k-1)$
Donc la propriété est héréditaire. Pourtant, on ne pourra jamais l'initialiser...

Exercice 5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

On le fait par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$. De plus, $\displaystyle\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\underset{HDR}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3,\ \ u_1 = 7\ \ \forall n \geq 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

Démontrer, à l'aide d'une **récurrence double**, que
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1}+3^n$.

On utilise une récurrence double.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n) : \text{"}u_n = 2^{n+1}+3^n\text{"}$$

- Initialisation : Pour $n = 0$, $2^{0+1}+3^0 = 2+1 = 3$ et $2^2+3^1 = 4+3 = 7$.

Or, $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

- Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies. Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 5u_n - 6u_{n-1} \\ & = & 5(2^{n+1} + 3^n) - 6(2^n + 3^{n-1} = \\ & = & 2^n(10-6) + 3^{n-1}(15-6) \\ & = & 2^{n+2} + 3^{n+1} \end{array}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence double,

$$\forall n \geq 0,\ u_n = 2^{n+1} + 3^n$$

Exercice 7. [**] Démontrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ à la fois pair et impair.
$\exists\ (k_1, k_2) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k_1 = 2k_2 + 1 \Rightarrow k_1 - k_2 = \dfrac{1}{2}$.
C'est absurde.

Exercice 8. [**] Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

On raisonne par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers (on le note $\mathbb{P}$) soit fini.
Alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^N,\ \ \mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Notons $N = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k + 1$. Soit N est premier, soit il ne l'est pas.

- Supposons N premier. Alors, $\exists i \in [\![1, n]\!],\ N = p_i$. Or, $N > p_i$ donc c'est absurde.
- Supposons N non premier. Alors, $\exists i \in [\![1, n]\!],\ p_i | N$.
  Or, $p_i | \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ donc, par somme, $p_i | 1$. C'est absurde.

Donc, l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 9. [**] Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

On raisonne par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.
Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ et $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} = \dfrac{p}{q} & \Leftrightarrow & p^2 = 2q^2 \\ & \Rightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 2k \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ q^2 = 2k^2 \\ \Rightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z},\ p = 2k \text{ et } q = 2\tilde{k} \\ \Rightarrow & \mathrm{pgcd}(p, q) \neq 1 \end{array}$$

C'est absurde donc $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

<u>Exercice</u> <u>10.</u> [**] Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

On raisonne par analyse et synthèse.

- <u>Analyse :</u> On suppose que

$$\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui convient.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
&\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad 1 = (a+b)x + 2a - b \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = 2a - b \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

- <u>Synthèse :</u>

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} = \frac{1/3(x+2) - 1/3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

On a bien trouvé un couple de réels qui convient.