

Chapitre 06 – Calculs de sommes et de produits (prof – 6h30)

Table des matières

1	Définitions et premiers exemples	2
1.1	Symbole $\sum$	2
1.2	Sommes usuelles	2
2	Règles de calculs	4
2.1	Relation de Chasles	4
2.2	Linéarité	5
2.3	Sommes télescopiques	6
2.4	Changement d'indice	7
3	Calculs de produits	9
3.1	Symbole $\prod$	9
3.2	Produits usuels	9
3.3	Règles de calculs	10
4	Coefficients binomiaux	11
4.1	Définitions et application	11
4.2	Propriétés	11
4.3	Triangle de Pascal	12
4.4	Démonstration du binôme de Newton	13
5	Sommes doubles	14
5.1	Définitions	14
5.2	Sur un rectangle	15
5.3	Sur un triangle	16

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Symbole $\sum$

Définition 1.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
La somme de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\sum_{k=m}^n x_k = x_m + x_{m+1} + \dots + x_{n-1} + x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{m \leq k \leq n} x_k = \sum_{k \in [m, n]} x_k$$

Exemple 2.

- $\sum_{i=1}^{12} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12.$
- $\sum_{i=1}^5 i = \underbrace{1}_{i=1} + \underbrace{2}_{i=2} + \underbrace{3}_{i=3} + \underbrace{4}_{i=4} + \underbrace{5}_{i=5} = 15.$

Remarque 3.

1. Cette notation se lit comme dans une boucle **for** en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, la somme est vide et vaut 0.
3. Dans la somme, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors de la somme, l'indice k n'existe pas.

Exemple 4. Chercher l'erreur dans $\sum_{k=0}^k x_k$.

L'entier k est à la fois l'indice muet de la somme et à la fois le dernier rang pour la somme.

1.2 Sommes usuelles

Théorème 5 (Somme de constantes).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n a = na$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \text{''} \sum_{k=1}^n a = na \text{''}$$

I Pour $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^1 a = a \text{ et } 1 \times a = a \text{ donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} a = \sum_{k=1}^n a + a \underset{\text{HR}}{=} na + a = (n+1)a$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. ■

Exemple 6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n a$.

Théorème 7 (Somme des premiers entiers).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : " \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} "$$

I Pour $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \text{ et } \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. ■

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{2n} k$ et $\sum_{k=2}^n k$.

Théorème 9 (Somme des premiers carrés d'entiers).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : " \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} "$$

I Pour $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \text{ et } \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \text{ donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

D'autre part,

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. ■

Théorème 10 (Somme géométrique).

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = n + 1$.

Démonstration : On a besoin d'outils vus plus loin. ■

Exemple 11. Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

2 Règles de calculs

2.1 Relation de Chasles

Théorème 12 (Relation de Chasles).

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k$$

Démonstration : Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^n x_k = x_m + \dots + x_n = x_m + \dots + x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k$$
■

Exemple 13. Soit $n \geq 5$. Calculer $\sum_{k=1}^n \min(k, 5)$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $\min(k, 5) = \begin{cases} 5 & \text{si } k \leq 5 \\ k & \text{sinon} \end{cases}$. On va donc couper la somme à 5.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \min(k, 5) &= \sum_{k=1}^5 \min(k, 5) + \sum_{k=6}^n \min(k, 5) \\ &= \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=6}^n 5 \\ &= \frac{5 \times 6}{2} + 5(n - 6 + 1) \\ &= 5n - 10 = 5(n - 2) \end{aligned}$$

Exemple 14. Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Soit $k \in \{1, \dots, 2n\}$. k est pair ou impair. On va couper la somme en deux en regroupant les termes pairs et les termes impairs.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor &= \sum_{\ell=1}^n \left\lfloor \frac{2\ell}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^n \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

2.2 Linéarité

Théorème 15 (Linéarité).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (x_k + y_k) &= \sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k \\ \sum_{k=m}^n (\lambda y_k) &= \lambda \sum_{k=m}^n y_k \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq p \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^n (x_k + y_k) = x_m + y_m + \dots + x_n + y_n = x_m + \dots + x_n + y_m + \dots + y_n = \sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=m}^n (\lambda y_k) = \lambda y_m + \dots + \lambda y_n = \lambda (y_m + \dots + y_n) = \lambda \sum_{k=m}^n y_k \quad \blacksquare$$

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $S = \sum_{k=0}^n (2k+1)$.

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2 \quad \blacksquare$$

Exemple 17. Soit $n \geq 1$. Calculer $S = \sum_{k=1}^n (8 - 2k + 6k^2)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (8 - 2k + 6k^2) &= \sum_{k=1}^n 8 - 2 \sum_{k=1}^n k + 6 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 8n - 2 \frac{n(n+1)}{2} + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 8n - n(n+1) + n(n+1)(2n+1) \\ &= 2n^3 + 2n^2 + 8n = 2n(n^2 + n + 8) \end{aligned}$$

2.3 Sommes télescopiques

Théorème 18 (Sommes télescopiques).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_m, \quad \sum_{i=m}^n (x_i - x_{i+1}) = x_m - x_{n+1}$$

Démonstration :

$$\sum_{i=m}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{m+1} - x_m + x_{m+2} - x_{m+1} + \dots + x_n - x_{n-1} + x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - x_m$$

Exemple 19. Calculer $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

On a déjà démontré que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exemple 20. Calculer $S = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

Théorème 21 (Somme géométrique).

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = n + 1$.

Démonstration : 1. Soit $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S = \sum_{k=0}^n q^k$.

$$\begin{aligned} S - qS &= \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k \\ (1 - q)S &= \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \\ &= 1 - q^{n+1} \\ \text{donc, } S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

2. Si $q = 1$, $S = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

2.4 Changement d'indice

Remarque 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^2 = 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2$$

Exemple 23. Proposer une autre écriture de $\sum_{k=1}^n (k-1)^3$.

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=0}^{n-1} k^3$$

Méthode 1 (Changement d'indice).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k + 1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in \llbracket m, n \rrbracket \Leftrightarrow_{j=k+1} j \in \llbracket m+1, n+1 \rrbracket$$

1. Changement de l'indice inférieur de la somme : $k = m$ devient $j = m + 1$
2. Changement de l'indice supérieur de la somme : $k = n$ devient $j = n + 1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\sum_{k=m}^n x_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

Exemple 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une autre écriture de $\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2}$.

On applique le changement de variable $j = k - 2 \Leftrightarrow k = j + 2$.

1. La borne inférieure devient $j = 2 - 2 = 0$.
2. La borne supérieure devient $j = n + 1 - 2 = n - 1$.
3. Le terme général x_{k-2} devient $x_{j+2-2} = x_j$.

$$\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j$$

Théorème 25 (Sommes télescopiques).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_m, \quad \sum_{i=m}^n (x_i - x_{i+1}) = x_m - x_{n+1}$$

Démonstration : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=m}^n (x_{i+1} - x_i) &= \sum_{i=m}^n x_{i+1} - \sum_{i=m}^n x_i \\
 &= \sum_{j=m+1}^{n+1} x_j - \sum_{i=m}^n x_i \\
 &= x_{n+1} + \sum_{j=m+1}^n x_j - \left(x_m + \sum_{i=m+1}^n x_i \right) \\
 &= x_{n+1} - x_m
 \end{aligned}$$

■

Théorème 26.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^n a = (n - m + 1)a$$

Démonstration : On va faire commencer la somme à 1 pour appliquer le théorème 6.

On applique donc le changement de variable $j = k - m + 1$.

1. La borne inférieure devient $j = m - m + 1 = 1$.
2. La borne supérieure devient $j = n - m + 1$.
3. Le terme général a devient a .

$$\sum_{k=m}^n a = \sum_{j=1}^{n-m+1} a = (n - m + 1)a$$

■

Théorème 27.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\sum_{k=m}^n q^k = n - m + 1$.
2. Si $q \neq 1$, $\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$.

Démonstration : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\sum_{k=m}^n q^k = \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$.
2. On va faire commencer les sommes à 0 pour appliquer le théorème 8.
On applique donc le changement de variable $j = k - m$.
 - La borne inférieure devient $j = m - m = 0$.
 - La borne supérieure devient $j = n - m$.
 - Le terme général q^k devient $q^{j+m} = q^j \cdot q^m$.

$$\sum_{k=m}^n q^k = \sum_{j=0}^{n-m} q^m \cdot q^j = q^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j = q^m \cdot \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

■

3 Calculs de produits

3.1 Symbole $\prod$

Définition 28.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
Le produit de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\prod_{k=m}^n x_k = x_m \times x_{m+1} \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\prod_{k=m}^n x_k = \prod_{m \leq k \leq n} x_k = \prod_{k \in [m, n]} x_k$$

Exemple 29.

- $\prod_{i=1}^{12} 1 = 1.$
- $\prod_{i=1}^5 i = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$

Remarque 30.

1. Cette notation se lit comme dans une boucle **for** en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, le produit est vide et vaut 1.
3. Dans le produit, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors du produit, l'indice k n'existe pas.

3.2 Produits usuels

Théorème 31 (Produit constant).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

$$\prod_{k=m}^n a = a^{n-m+1}$$

Définition 32 (Produit des premiers entiers non nuls).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle factorielle de n et on note $n!$ le produit $n! = \prod_{i=1}^n i$.

Par convention, $0! = 1$.

Théorème 33.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1) \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Exemple 34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^n k^2$.

Démonstration : $\prod_{k=1}^n k^2 = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^2 = (n!)^2$. ■

3.3 Règles de calculs

Théorème 35 (Relation de Chasles).

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\prod_{k=m}^n x_k = \left(\prod_{k=m}^p x_k \right) \times \left(\prod_{k=p+1}^n x_k \right)$$

Théorème 36 (Multiplicativité).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^n (x_k \cdot y_k) &= \prod_{k=m}^n x_k \times \prod_{k=m}^n y_k \\ \prod_{k=m}^n (\lambda y_k) &= \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n y_k \end{aligned}$$

Théorème 37 (Produits télescopiques).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels **non nuls**.

$$\prod_{k=m}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m}, \quad \prod_{k=m}^n \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_m}{x_{n+1}}$$

Méthode 2 (Changement d'indice).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k + 1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in \llbracket m, n \rrbracket \Leftrightarrow_{j=k+1} j \in \llbracket m+1, n+1 \rrbracket$$

1. Changement de l'indice inférieur du produit : $k = m$ devient $j = m + 1$
2. Changement de l'indice supérieur du produit : $k = n$ devient $j = n + 1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\prod_{k=m}^n x_{k+1} = \prod_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

4 Coefficients binomiaux

4.1 Définitions et application

Définition 38.

Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier positif tel que $k \leq n$.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ l'entier défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pour $k > n$ ou $k < 0$, par convention, $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple 39. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Exemple 40. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{0}{3}a^3 + \binom{1}{3}a^2b + \binom{2}{3}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Théorème 41 (Binôme de Newton).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4.2 Propriétés

Théorème 42 (Symétrie des coefficients binomiaux).

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration : Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

■

4.3 Triangle de Pascal

Théorème 43.

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Démonstration : Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Remarque 44. Avec cette formule, on peut calculer les coefficients binomiaux de proche en proche.

- Pour $n=0$ $\binom{0}{0} = 1$.
- Pour $n=1$ $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.
- Pour $n=2$ $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$.
- Pour $n=3$ $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 2 + 1 = 3$, $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

Remarque 45. On peut représenter les coefficients binomiaux dans un tableau. C'est sa forme triangulaire qui donne le nom de *Triangle de Pascal*.

$n \backslash p$	0	1	2	3	...	p
0	$\binom{0}{0} = 1$					
1	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
2	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$			
3	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$		
$\vdots$	$\vdots$					
n	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$			$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$
$n+1$	$\binom{n+1}{0} = 1$	$\binom{n+1}{1} = n+1$				$\binom{n+1}{p}$

Théorème 46.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : " \forall k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leq n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N} "$$

I Pour $n = 1$.

$$\binom{1}{0} = 0 \in \mathbb{N} \text{ et } \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N} \text{ donc } P(1) \text{ est vrai.}$$

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai. Soit $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

$$\text{Si } k = 0, \binom{n+1}{0} = 0 \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Si } k = n+1, \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Si } 0 < k < n+1, \text{ par le triangle de Pascal, } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont des entiers. Donc, $\binom{n+1}{k}$ est aussi un entier.

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

4.4 Démonstration du binôme de Newton

Théorème 47.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On va raisonner par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},"$$

I Pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 \text{ et } (a+b)^0 = 1 \text{ donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ (a+b)^{n+1} &= (a+b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la première somme.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}}_{\ell=n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
 &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
 &= \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

Théorème 48.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Démonstration : • On applique le binôme de Newton avec $a = b = 1$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

• On applique le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = -1$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$$
■

5 Sommes doubles

5.1 Définitions

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

k	1	2	...	n
	x_1	x_2	...	x_n

La somme $\sum_{k=1}^n x_k$ peut se comprendre comme la somme des termes inscrits dans une ligne d'un tableau.

• Si le tableau contient deux lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \sum_{k=1}^n x_{1,k} + \sum_{k=1}^n x_{2,k}$.

- Si le tableau contient trois lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$
	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	...	$x_{3,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \sum_{k=1}^n x_{1,k} + \sum_{k=1}^n x_{2,k} + \sum_{k=1}^n x_{3,k} = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{k=1}^n x_{\ell,k}$.

5.2 Sur un rectangle

Théorème 49 (Somme sur un rectangle).

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $(x_{j,k}, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	...	$x_{m,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} x_{j,k}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k , $\left(\sum_{j=0}^m x_{j,k} \right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} x_{j,k} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^m x_{j,k} \right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j , $\left(\sum_{k=0}^n x_{j,k} \right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} x_{j,k} = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=0}^n x_{j,k} \right)$$

Exemple 50. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} 2^{k+j}$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} 2^{k+j} &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^m 2^{k+j} \right) = \sum_{k=0}^n \left(2^k \sum_{j=0}^m 2^j \right) = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot \frac{1-2^{m+1}}{1-2} \\ &= (2^{m+1} - 1) \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (2^{n+1} - 1)(2^{m+1} - 1) \end{aligned}$$

5.3 Sur un triangle

Théorème 51 (Somme sur un triangle).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_{j,k}, 0 \leq j \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$\dots$	$x_{1,n}$
	$x_{2,2}$	$\dots$	$\dots$	$x_{2,n}$
		$x_{3,3}$	$\ddots$	$\vdots$
			$\ddots$	
				$x_{n,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{j,k}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k , $\left(\sum_{j=0}^k x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{j,k} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k x_{j,k} \right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j , $\left(\sum_{k=j}^n x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{j,k} = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n x_{j,k} \right)$$

Exemple 52. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j}{k}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j}{k} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \frac{j}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k j \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \frac{n(n+3)}{4}
 \end{aligned}$$