

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes.
 - $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
 - Soit $a \in \mathbb{R}$. $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$.
 - $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n$
 - $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1)$
- Ecrire les sommes et produits suivants en extension.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{k=1}^{12} 2k. & \text{(c)} \sum_{k=1}^n k(k-1). \\ \text{(b)} \sum_{k=1}^{2n} 2^k. & \text{(d)} \prod_{k=1}^n 1. \end{array}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les quantités suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=1}^n (2k-1) & 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} & 5. \sum_{k=1}^n k(k+1). \\ 2. \sum_{k=4}^{n+1} (3k+7) & 4. \prod_{k=1}^n k e^k & \end{array}$$

Exercice 3.

- Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

- En déduire l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 4. Soit $(q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{k=1}^n q^k(1-q) & 3. \sum_{k=1}^n k \times k! \\ 2. \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} & 4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \end{array}$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Exprimez de deux façons la somme suivante. $S = \sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4]$.
- En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 6. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

- A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.
- Calculez $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 7. Résoudre l'équation suivante.

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1}$
4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{2^i}$

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculez $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$.
2. Soit $1 \leq k \leq n$. Démontrez que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.
4. [*] Calculez $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 10.

1. Quel est le coefficient devant $a^4 b^2$ dans le développement de $(a-b)^6$?
2. Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les sommes doubles suivantes sous forme de deux sommes puis les calculer.

1. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} 1$
2. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} j$
3. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1$
4. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} ij$
5. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j)^2$

Exercice 12. [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit $P = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $P + I$ et $P - I$.
2. En déduire I et P .

Exercice 13. [*] Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$.

On pose $A_n = (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n}$.

1. Calculez A_n .
2. En déduire que le réel $s_n = (1-\sqrt{2})^{2n} + (1+\sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.