

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes.

- (a) $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
- (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$.
- (c) $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n$
- (d) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1)$

2. Ecrire les sommes et produits suivants en extension.

- (a) $\sum_{k=1}^{12} 2k$.
- (c) $\sum_{k=1}^n k(k-1)$.
- (b) $\sum_{k=1}^{2n} 2^k$.
- (d) $\prod_{k=1}^n 1$.

Correction

1. (a) $\sum_{k=3}^{10} k = \sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^2 k = \frac{10 \times 11}{2} - 3 = 52$.

(b) $\sum_{k=0}^n a^{2k} = \sum_{k=0}^n (a^2)^k = \begin{cases} \frac{1 - (a^2)^{n+1}}{1 - a^2} & \text{si } a^2 \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } a^2 = 1 \end{cases}$

(c) C'est le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$ donc

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!.$$

(d) C'est le produit de tous les nombres impairs plus petits que $(2n + 1)$ donc

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1) = \prod_{k=0}^n (2k + 1).$$

C'est aussi le produit de tous les nombres plus petits que $(2n + 1)$ divisé par le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$

$$\prod_{k=0}^n (2k + 1) = \frac{\prod_{k=0}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}.$$

2. (a) $\sum_{k=1}^{12} 2k = 2 + 4 + 6 + \dots + 22 + 24$.

(b) $\sum_{k=1}^{2n} 2^k = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{2n-1} + 2^{2n}$.

(c) $\sum_{k=1}^n k(k-1) = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + (n-1)(n-2) + n(n-1)$.

(d) $\prod_{k=1}^n 1 = 1 \times \dots \times 1 \times 1$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les quantités suivantes.

1. $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ 5. $\sum_{k=1}^n k(k+1)$.

2. $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$ 4. $\prod_{k=1}^n k e^k$

Correction

1. $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

2.
$$\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7) = 3 \sum_{k=4}^{n+1} k + 7 \sum_{k=4}^{n+1} 1 = 3 \frac{(n+1-4+1)(n+1+4)}{2} + 7(n+1-4+1)$$

$$= \frac{3(n-2)(n+5)}{2} + 7(n-2) = \frac{(n-2)(3n+29)}{2}.$$
3.
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{2(1 - \frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1.$$
4.
$$\prod_{k=1}^n k e^k = \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n e^k = n! \cdot e^{\sum_{k=1}^n k} = n! e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$
5.
$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 3n)$$

$$= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 4n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Correction

1. On raisonne par analyse-synthèse.

A Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

$$\text{Donc, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)}.$$

$$\text{Donc, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a(k+1) + bk = (a+b)k + a.$$

Par identification, $a = 1$ et $a + b = 0$.

Donc, $a = 1$ et $b = -1$.

S Posons $a = 1$ et $b = -1$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Donc, il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

$$2. \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

On reconnaît une somme télescopique.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 4. Soit $(q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants.

1. $\sum_{k=1}^n q^k (1-q)$
3. $\sum_{k=1}^n k \times k!$
2. $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}$
4. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Correction

- $\sum_{k=1}^n q^k(1-q) = \sum_{k=1}^n (q^k - q^{k+1}) = q - q^{n+1}.$
- $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$
- $\sum_{k=1}^n k \times k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n [(k+1)k! - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$
- Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k}.$
 $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Exprimez de deux façons la somme suivante. $S = \sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4].$
- En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3.$

Correction

- $\sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4] = (n+1)^4 - 1$ par la formule des sommes télescopiques.
 D'autre part, $\sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4] = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$
- Notons $S = \sum_{k=1}^n k^3.$

D'après la question précédente, $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) = 4S + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n.$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 4S &= (n+1)^4 - 1 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - n \\
 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\
 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\
 &= n^2(n+1)^2
 \end{aligned}$$

Finalement, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Exercice 6. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

- A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.

Correction $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ donc $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}.$

- Calculez $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$

Correction $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2 \sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{x}{2^k})}.$

On reconnaît un produit télescopique. Donc,

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2^n})}.$$

Exercice 7. Résoudre l'équation suivante.

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

Correction

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = \frac{6n + 3n(n-1) + (n-2)(n^2-n)}{6} = \frac{n^3 + 5n}{6}.$$

Donc l'équation à résoudre est $n^3 + 5n = 20n$ c'est à dire $n(n^2 - 25) = 0$.

On cherche une solution strictement positive donc $n = 5$ est la seule solution au problème posé.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1}$
4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{2^i}$

Correction

1. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n.$
2. $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$
3. $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1} \times 1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} = \frac{1}{3} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} - \underbrace{1}_{i=0} \right]$
 $= \frac{(3+1)^n - 1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}.$
4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{2^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \times 1^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \times 1^{n-i} - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{i=n} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}$
 $= \frac{3^n - 1}{2^n}.$

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculez $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$.

Correction $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = 2^{n-1}.$

2. Soit $1 \leq k \leq n$. Démontrez que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Correction $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1+1)!}$
 $= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Correction $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} = n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = n 2^{n-1}.$

4. [*] Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Correction Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}. \\ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} - \binom{n+1}{0} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Exercice 10.

1. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$?

Correction Par le binôme de Newton, $(a-b)^6 = \sum_{l=0}^6 \binom{6}{l} a^l (-b)^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l=2$,

c'est-à-dire $(-1)^2 \binom{6}{2} = 15$.

2. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

Correction Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a-b)^{9-k} (2c)^k$.

On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k=3$ c'est à dire $\binom{9}{3} 2^3 (a-b)^6$.

Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.

Ce coefficient est donc $\binom{9}{3} 2^3 \binom{6}{2} = 10080$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les sommes doubles suivantes sous forme de deux sommes puis les calculer.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} 1 & 4. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} ij \\ 2. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} j & 5. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j)^2 \\ 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 & \end{array}$$

Correction

$$1. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n n = n^2.$$

$$2. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{(n-i+1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i \text{ et } n} = \sum_{i=1}^n (n+1-i) = \sum_{i=1}^n (n+1) - \sum_{i=1}^n i \\ &= (n+1)n - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \left(n - \frac{n}{2} \right) = \frac{(n+1)n}{2}. \end{aligned}$$

$$4. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n i \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n i \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
5. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2. \\
&\bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n j^2}_{\text{formule sur les carrés}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 = n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \\
&\bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \\
&\bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 &= 2 \cdot \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{2n^2(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)[2(2n+1) + 3(n+1)]}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 12. [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit $P = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $P + I$ et $P - I$.

Correction On remarque d'abord que P correspond en fait à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair inférieur à n et I correspond à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair inférieur à n . Ainsi, $I + P = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} = 2^n$.

De plus, $P - I$ correspond donc à la somme des $\binom{n}{k}$ avec un signe positif lorsque k est pair et négatif sinon.

$$\text{Donc, } P - I = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} = 0.$$

2. En déduire I et P .

Correction On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} P + I = 2^n \\ P - I = 0 \end{cases} \Rightarrow P = I = 2^{n-1}$$

Exercice 13. [*] Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$.

On pose $A_n = (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n}$.

1. Calculez A_n .

Correction On applique le binôme de Newton aux 2 termes de la somme :

$$\begin{cases} (a-b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k (-b)^{2n-k} \\ (a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} \end{cases} \Rightarrow (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} [(-1)^{2n-k} + 1]$$

$$\text{Or, } (-1)^{2n-k} + 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Finalement, il ne reste que les indices k pairs dans la somme c'est à dire quand $k = 2p$ avec $0 \leq p \leq n$.

$$\text{Donc, } (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n} = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} a^{2p} b^{2n-2p} \times 2 = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (a^2)^p (b^2)^{n-p}.$$

2. En déduire que le réel $s_n = (1 - \sqrt{2})^{2n} + (1 + \sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.
Correction Pour calculer s_n , on applique la formule avec $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

$$s_n = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (1^2)^p (\sqrt{2}^2)^{n-p} = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} 2^{n-p}$$

. C'est bien un entier naturel pair.