



Devoir Surveillé n°2

Samedi 4 octobre 2025

– Fonctions usuelles, trigonométrie –

Exercice 1 - Raisonnements.

1. Traduire avec des quantificateurs la phrase suivante.
Entre deux nombres réels distincts, on peut toujours trouver un nombre rationnel.
2. Montrer que
$$\forall \in \mathbb{R}, a^2 \text{ n'est pas un multiple de } 16 \implies \frac{a}{2} \text{ n'est pas un entier pair.}$$
3. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est aussi un irrationnel.

Exercice 2 - Ensembles.

Soit E un ensemble. Soient A , B et C trois parties de E .

Les 2 questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Montrer que $(A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) = C$.

Exercice 3 - Une équation polynomiale.

Soit la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$$

On considère l'équation (E) : $P(x) = 0$. Le but de cet exercice est de résoudre cette équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que 0 n'est pas solution de (E).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que si α est solution de (E), alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E).
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$P(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ (E')}$$

4. Déterminer trois réels a , b , et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{ (E')} \iff a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

5. Résoudre $y^2 + 2y - 3 = 0$
6. Dédire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E') puis celui de (E).
7. Vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec le résultat de la question 2.

Exercice 4 - Calcul de $\cos \frac{\pi}{10}$ avec les polynômes de Tchebitchev.

Considérons la suite de fonctions polynomiales définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\end{aligned}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $T_n(x)$ pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
2. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(n\theta)$.
(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Dédurre de la question précédente que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Toute récurrence sera particulièrement soignée.

- (c) Calculer $T_n(-1)$ et $T_n(1)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente.
3. (a) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(5\theta) = 0$$

- (b) Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- (c) Montrer que $\cos \frac{\pi}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (d) En considérant la fonction polynomiale T_5 et la relation établie à la question 2b, montrer que $\cos \frac{\pi}{10}$ est une solution de l'équation (E) : $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ (dans cette question, on ne demande pas de résoudre l'équation (E)).
- (e) Résoudre l'équation (E) (on pourra poser $y = x^2$).
- (f) Classer les racines de l'équation (E) dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ et montrer que $x_3 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra commencer par montrer que $x_3^2 < \frac{3}{4}$).
- (g) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{10}$.