Chapitre 07 – Nombres complexes (prof)

Table des matières

1 Nombres complexes

Définition 1.

Soit $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i}^2 = -1$.
On appelle ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$\mathbb{C} = \left\{x + \mathbf{i}y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On dit que z est donné sous forme algébrique.
Le réel x est appelé la partie réelle de z. On le note $\mathrm{Re}(z)$.
Le réel y est appelé la partie imaginaire de z. On le note $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple 2. Règles de calcul.

- *Distributivité :* $\mathbf{i}(2 - \mathbf{i}) = 2\mathbf{i} - \mathbf{i}^2 = 1 + 2\mathbf{i}$
- *Factorisation :* $2\mathbf{i} + 2 - \sqrt{3}\mathbf{i} = 2 + \mathbf{i}(2 - \sqrt{3})$
- *Identités remarquables :* $(2 - \mathbf{i})(2 + \mathbf{i}) = 2^2 - \mathbf{i}^2 = 5$

Exemple 3. Résolution d'équation.
Déterminer les complexes z tels que $z = 3z + \mathbf{i} + 3$.
$z = 3z + \mathbf{i} + 3 \Leftrightarrow -2z = \mathbf{i} + 3 \Leftrightarrow z = \frac{-3}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2}$.

Exemple 4. Donner l'écriture algébrique des complexes suivants.

1. $z = \frac{1}{2 + \mathbf{i}}$.
   On multiplie par *la partie conjuguée*
$$\frac{1}{2 + \mathbf{i}} = \frac{2 - \mathbf{i}}{(2 + \mathbf{i})(2 - \mathbf{i})} = \frac{2 - \mathbf{i}}{4 - \mathbf{i}^2} = \frac{2 - \mathbf{i}}{5} = \frac{2}{5} - \mathbf{i}\frac{1}{5}$$
2. $z = \frac{3 + 2\mathbf{i}}{2 + \mathbf{i}}$.
   On multiplie par *la partie conjuguée*
$$\frac{3 + 2\mathbf{i}}{2 + \mathbf{i}} = \frac{(3 + 2\mathbf{i})(2 - \mathbf{i})}{(2 + \mathbf{i})(2 - \mathbf{i})} = \frac{6 - 3\mathbf{i} + 4\mathbf{i} - 2\mathbf{i}^2}{4 - \mathbf{i}^2} = \frac{8 + \mathbf{i}}{5} = \frac{8}{5} + \mathbf{i}\frac{1}{5}$$

1.1 Affixe et image dans la plan complexe

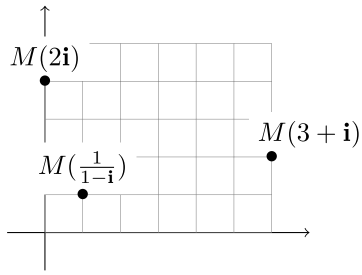
On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 5.

- Soit $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$. On appelle image de z le point $M(x, y)$ du plan $\mathcal{P}$.
- Soit $A(x, y)$ un point du plan $\mathcal{P}$.
  On appelle affixe de A et on note z_A le complexe $z_A = x + \mathbf{i}y$.
- Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$.
  L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $z_B - z_A$.

Exemple 6. Placer, dans le plan, les images des complexes $z = 3 + \mathbf{i}$, $z = 2\mathbf{i}$ et $z = \frac{1}{1 - \mathbf{i}}$.

$$\frac{1}{1-\mathbf{i}} = \frac{1+\mathbf{i}}{(1-\mathbf{i})(1+\mathbf{i})} = \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}^2} = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}.$$



1.2 Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe

Définition 7.

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Lorsque la partie réelle de z est nulle, on dit que z est un imaginaire pur : $z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.
Lorsque la partie imaginaire de z est nulle, on dit que z est un réel : $z \in \mathbb{R}$.

Remarque 8. La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe sont des **réels**.

Théorème 9 (Linéarité des parties réelles et imaginaires)**.**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
1. $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
2. $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.
3. $\mathrm{Re}(\lambda.z) = \lambda.\mathrm{Re}(z)$
4. $\mathrm{Im}(\lambda.z) = \lambda.\mathrm{Im}(z)$

Démonstration : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. $\exists(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$ et $z = x' + \mathbf{i}y'$.
1. $z + z' = x + \mathbf{i}y + x' + \mathbf{i}y' = x + x' + \mathbf{i}(y + y')$.
   Par identification, $\mathrm{Re}(z + z') = x + x' = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = x + x' = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\lambda.z = \lambda(x + \mathbf{i}y) = \lambda.x + \mathbf{i}\lambda.y$.
   Par identification, $\mathrm{Re}(\lambda.z) = \lambda.x = \lambda.\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda.z) = \lambda.y = \lambda.\mathrm{Im}(z)$. ■

Théorème 10.

Il y a unicité de la forme algébrique.

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{array} \right.$$

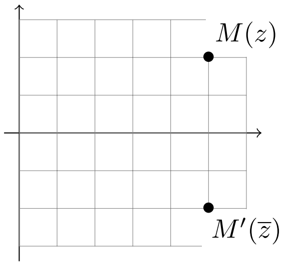
Remarque 11. Une équation avec des complexes donne donc deux équations avec des réels.

2 Opérations sur les complexes

2.1 Conjugaison d'un nombre complexe

Définition 12.

Soit $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$.
On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe défini par $\overline{z} = x - \mathbf{i}y$.



Exemple 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = 3\overline{z} + \mathbf{i}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe deux réels x et y tels que $z = x + \mathbf{i}y$.

$$z = 3\overline{z} + \mathbf{i} \Leftrightarrow x + \mathbf{i}y = 3(x - \mathbf{i}y) + \mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x \\ y = -3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{\mathbf{i}}{4}.$$

Théorème 14.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\overline{\lambda z} = \lambda.\overline{z}$.
4. $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.
5. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. $\exists (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$ et $z = x' + \mathbf{i}y'$.

1. $\overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathbf{i}y} = x - \mathbf{i}(-y) = x + \mathbf{i}y = z$.
2. $\overline{z + z'} = \overline{x + x' + \mathbf{i}(y + y')} = x + x' - \mathbf{i}(y + y') = x - \mathbf{i}y + x' - \mathbf{i}y' = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\overline{\lambda.z} = \overline{\lambda.x + \mathbf{i}y} = \lambda.x - \mathbf{i}\lambda.y = \lambda\overline{z}$.
4. $zz' = (x + \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y') = xx' - yy' + \mathbf{i}(xy' + x'y) \Rightarrow \overline{zz'} = xx' - yy' - \mathbf{i}(xy' + x'y)$.
   $\overline{z}.\overline{z'} = (x - \mathbf{i}y)(x' - \mathbf{i}y') = xx' - yy' + \mathbf{i}(-xy' - x'y) = \overline{zz'}$.
5. On suppose $z' \neq 0$.
   $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{(x + \mathbf{i}y)(x' - \mathbf{i}y')}{(x' + \mathbf{i}y')(x' - \mathbf{i}y')} = \dfrac{xx' + yy' + \mathbf{i}(-xy' + x'y)}{(x')^2 + (y')^2} \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{xx' + yy' - \mathbf{i}(-xy' + x'y)}{(x')^2 + (y')^2}$.
   $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \dfrac{(x - \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y')}{(x' - \mathbf{i}y')(x' + \mathbf{i}y')} = \dfrac{xx' + yy' + \mathbf{i}(xy' - yx')}{(x')^2 + (y')^2} = \dfrac{xx' + yy' - \mathbf{i}(-xy' + yx')}{(x')^2 + (y')^2} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$. ■

Théorème 15.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}$.
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
3. $z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
4. $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ donc $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

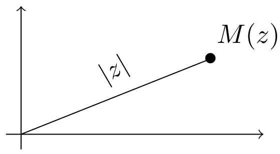
Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$.

1. $z + \overline{z} = x + \mathbf{i}y + x - \mathbf{i}y = 2x \Rightarrow x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
   $z - \overline{z} = x + \mathbf{i}y - x + \mathbf{i}y = 2\mathbf{i}y \Rightarrow y = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}$.
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
3. $z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
4. $z.\overline{z} = (x+\mathbf{i}y)(x-\mathbf{i}y) = x^2 - (\mathbf{i}y)^2 = x^2 + y^2$. ■

2.2 Module d'un nombre complexe

Définition 16.

Soit $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$.
On appelle module de z et on note $|z|$, le réel défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.



- Si M est le point d'affixe z alors $|z|$ représente la longueur $||\overrightarrow{OM}||$.
- Si A est le point d'affixe a alors $|z-a|$ représente la longueur $||\overrightarrow{AM}||$.

Exemple 17. Calculer le module de $z = 2 + \mathbf{i}\sqrt{2}$ et de $z = 1 - \mathbf{i}$.

$|2+\mathbf{i}\sqrt{2}| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
$|1-\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

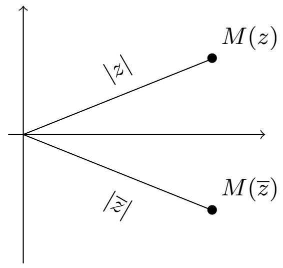
Théorème 18.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $|z|^2 = z\overline{z}$.
3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

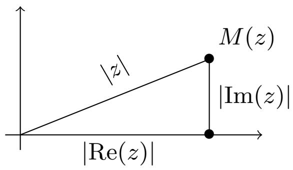
Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$.

1. $|\overline{z}| = |x - \mathbf{i}y| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.



2. $z.\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2$.
3. Soit M le point d'affixe z.

   Le segment $[OM]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de mesures $|\mathrm{Re}(z)|$, $|\mathrm{Im}(z)|$ et $|z|$.



■

Remarque 19. Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-a| = r$.

Exemple 20. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $|z - 1| \leq 2$.

Notons A le point d'affixe 1. Alors, $|z - 1|$ représente la longueur $||\overrightarrow{AM}||$.
$|z - 1| \leq 4$ si, et seulement si, M appartient au disque de centre $A(1, 0)$ et de rayon 4.

Théorème 21.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
1. $|zz'| = |z||z'|$.
2. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
3. Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Démonstration : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. $\exists (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$ et $z = x' + \mathbf{i}y'$.
1. $z.z' = (x + \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y') = xx' - yy' + \mathbf{i}(xy' + x'y) \Rightarrow |z.z'|^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2$.
   $= (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2$.
   $(|z||z'|)^2 = |z|^2.|z'|^2 = (x^2 + y^2)((x')^2 + (y')^2) = x^2(x')^2 + x^2(y')^2 + y^2(x')^2 + y^2(y')^2 = |z.z'|^2$.
   Donc, $|z.z'| = |z||z'|$.
2. On fait pareil.
3. Supposons z non nul. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. ■

Théorème 22 (Inégalité triangulaire)**.**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ et } |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$ donc $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z||\overline{z'}|$.

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &\leq |z|^2 + 2|z||\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont positifs, on en déduit que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

$$|z-z'| \leq |z| + |-z'| \Rightarrow |z-z'| \leq |z|+|z'|$$

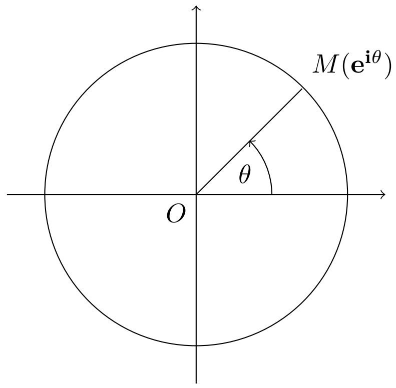
■

3 Formes trigonométriques et exponentielles

3.1 Les nombres complexes de module 1

Définition 23.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle exponentielle (de) $\mathbf{i}\theta$ et on note $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ le complexe défini par $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$.



Exemple 24. $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$.

Exemple 25. Déterminer $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$.

$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2}$.

Théorème 26 (Règles de calculs)**.**

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \cos(\theta)$, $\mathrm{Im}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \sin(\theta)$ et $|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}| = 1$.
   En particulier, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 0$.
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}$ si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\theta = \theta' + 2k\pi$.
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \mathbf{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$.
4. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}$
5. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathbf{e}^{i\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta}$.

Démonstration : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$.

1. $\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \sin(\theta)$.
   $|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

2. Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \mathrm{Im}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi
\end{aligned}$$

3. $\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \overline{\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)} = \cos(\theta) - \mathbf{i}\sin(\theta) = \cos(-\theta) + \mathbf{i}\sin(-\theta) = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$.
   $\dfrac{1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \dfrac{\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}{|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}|^2} = \overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$
4. Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. Par définition, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + \mathbf{i}\sin(\theta+\theta')$.
   On applique alors les formules de trigonométrie.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathbf{i}[\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')] \\
&= \cos(\theta)[\cos(\theta') + \mathbf{i}\sin(\theta')] + \mathbf{i}\sin(\theta)[\cos(\theta') + \mathbf{i}\sin(\theta)] \\
&= [\cos(\theta') + \mathbf{i}\sin(\theta')][\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)] \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}
\end{aligned}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence en appliquant des formules de trigonométrie.
   Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^{-(-n)} = \left(\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^{-n}\right)^{-1} = \left(\mathbf{e}^{-n\mathbf{i}\theta}\right)^{-1} = \mathbf{e}^{n\mathbf{i}\theta}$$

■

Théorème 27 (Formules d'Euler)**.**

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$$

On peut également reformuler ces formules.

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = 2\cos(\theta) \text{ et } \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = 2\mathbf{i}\sin(\theta)$$

Démonstration : Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}{2} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}$$

De même,

$$\mathrm{Im}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}{2\mathbf{i}} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$$

■

Exemple 28. Linéarisation des fonctions circulaires
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^3(\theta)$ avec des termes de la forme $\cos(n\theta)$.

$$
\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^3}{8}\\
&= \frac{\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^3+3\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^2.\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}\right)^2+\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}\right)^3}{8}\\
&= \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}.\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}.\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{8}\\
&= \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{8}\\
&= \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}+3(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})}{8}\\
&= \frac{3\cos(3\theta)+6\cos(\theta)}{8}\\
\cos^3(\theta) &= \frac{\cos(3\theta)+3\cos(\theta)}{4}
\end{aligned}
$$

Methode 1 (Linéarisation).

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Pour linéariser $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ (supprimer les puissances et les produits),

- on applique les formules d'Euler

$$\cos^p(\theta)\sin^q(\theta) = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^p.\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^q$$

- on distribue les puissances.

$$\cos^p(\theta)\sin^q(\theta) = \frac{(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^p}{2^p}.\frac{(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})^q}{2^q\mathbf{i}^q}$$

- on développe avec la formule du binôme de Newton
- on regroupe les termes pour faire apparaître $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

Exemple 29. Méthode de l'angle moitié

Exprimer $z=1+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}$ sous forme de produit et calculer son module.

$$
\begin{aligned}
1+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}0}+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}\\
&= \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}\left(\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{8}}+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}
\end{aligned}
$$

On peut alors calculer son module.

$$|z| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|.|\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}| = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Théorème 30 (Formules de Moivre).

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z}^*,\ \cos(n\theta)=\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^n\right]$$

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z}^*,\ \sin(n\theta)=\mathrm{Im}\left[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^n\right]$$

Démonstration : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{in\theta} \Rightarrow (\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

■

Exemple 31. Polynômes trigonométriques
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

$$\begin{array}{rcl} \cos(4\theta) & = & \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}) = \mathrm{Re}[(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^4] \\ (\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^4 & = & \cos^4(\theta) + 4\mathbf{i}\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \end{array}$$

En ne conservant que la partie réelle,

$$\begin{array}{rcl} \cos(4\theta) & = & \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \\ & = & \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2 \\ & = & \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta) + 6\cos^4(\theta) + 1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ & = & 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 \end{array}$$

Methode 2 (Polynômes trigonométriques)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour exprimer $\cos(p\theta)$ ou $\sin(p\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$,

- on applique la formule de Moivre

$$\cos(p\theta) = \mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^p\right] \text{ ou } \sin(p\theta) = \mathrm{Im}\left[(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^p\right]$$

- on utilise le binôme de Newton.
- on ne conserve que la partie réelle ou imaginaire.

3.2 Arguments et forme trigonométrique

Théorème 32.

Soit $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}^*$.

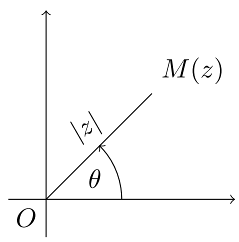
1. $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$.
2. Il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $z = |z|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$.

$$z = x + \mathbf{i}y = |z|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = |z|\cos(\theta) \\ y = |z|\sin(\theta) \end{array}\right.$$

Définition 33.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Une écriture de z sous la forme $z = |z|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est appelée forme trigonométrique de z.

L'ensemble $\{\theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des arguments de z.
En imposant $\theta \in [0, 2\pi]$, on a unicité de l'écriture trigonométrique et $(|z|, \theta)$ sont les coordonnées polaires de z.



Exemple 34. Donner la forme trigonométrique du complexe $z = 1 + \mathbf{i}$ puis la forme algébrique de $(1+\mathbf{i})^4$.
$|1+\mathbf{i}| = \sqrt{2}$. Donc $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.

$z^4 = \left(2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^4\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{4}} = -2^4$.

4 Equations complexes du second degré

4.1 Equations du second degré à coefficients réels.

Théorème 35.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et soit Δ le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine double $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet exactement deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b-\mathbf{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\mathbf{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Exemple 36. Résoudre l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$.

$\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{3+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$.

4.2 Relation coefficients−racines

Théorème 37.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

z_1 et z_2 sont solutions de $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si, $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Démonstration : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } az^2+bz+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall z \in \mathbb{C},\ az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall z \in \mathbb{C},\ az^2+bz+c = az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1z_2 = \dfrac{c}{a} \end{array} \right. \end{aligned}$$

■

Exemple 38. Déterminer les couples de complexes $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=3 \end{array} \right.$.

Les complexes x et y sont les deux solutions de l'équation $z^2-2z+3=0$.
(On ne sait pas qui est x et qui est y).
$\Delta = 4-12 = -8 < 0$.
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2+\mathbf{i}\sqrt{8}}{2} = 1+\mathbf{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \dfrac{2-\mathbf{i}\sqrt{8}}{2} = 1-\mathbf{i}\sqrt{2}$.
Il y a donc deux couples solutions.

$$S = \left\{ (1+\mathbf{i}\sqrt{2}, 1-\mathbf{i}\sqrt{2})\ ,\ (1-\mathbf{i}\sqrt{2}, 1+\mathbf{i}\sqrt{2}) \right\}$$

4.3 Racine carrée d'un complexe.

Définition 39.

Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle racinée carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Exemple 40. $(1+\mathbf{i})^2 = 2\mathbf{i}$ donc $1+\mathbf{i}$ est une racine carrée de $2\mathbf{i}$.
$(2\mathbf{i})^2 = -4$ donc $2\mathbf{i}$ est une racine carrée de -4.

Théorème 41.

Soit $Z = a+\mathbf{i}b$ un nombre complexe non nul.
L'équation $z^2 = Z$, d'inconnue $z = x+\mathbf{i}y$, admet exactement deux solutions qui sont des complexes opposés.
Pour les trouver, on résout le système suivant.

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right.$$

Démonstration : On cherche z sous la forme algébrique.

$$\begin{aligned} z^2 = Z \quad &\Leftrightarrow \quad (x+\mathbf{i}y)^2 = a+\mathbf{i}b \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-y^2+2\mathbf{i}xy = a+\mathbf{i}b \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right. \end{aligned}$$

On ajoute une équation $|z^2| = |Z| \Leftrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$. ■

Exemple 42. Déterminer les deux racines carrés de $Z = 3+4\mathbf{i}$.
Soit $z = x+\mathbf{i}y \in \mathbb{C}$.

$$z^2 = 3+4\mathbf{i} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ 2x^2 = 8 \\ xy = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 1 \\ x^2 = 4 \\ xy = 2 \end{array} \right.$$

Donc, $S = \{2+\mathbf{i}\ ,\ -2-\mathbf{i}\}$.