

Exercice 1

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \exists z \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x \leq z \leq y \text{ ou } y \leq z \leq x$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

On va raisonner par contraposée : on suppose que $\frac{a}{2}$ est pair.

Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{a}{2} = 2k$.

Donc, $a = 4k$.

Donc, $a^2 = 16k^2$.

Donc, a^2 est un multiple de 16.

On a donc montré que

$$\forall \in \mathbb{R}, a^2 \text{ n'est pas un multiple de } 16 \implies \frac{a}{2} \text{ n'est pas un entier pair.}$$

3. Soit x un irrationnel positif.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{x}$ est un rationnel.

Donc, $\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$.

Donc, $x = \frac{a^2}{b^2}$.

Donc, x est un rationnel. C'est absurde.

Donc, $\sqrt{x}$ est un irrationnel.

Exercice 2 - Ensembles.

On va utiliser les règles de calculs sur l'union, l'intersection et le complémentaire.

1.

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ &= \overline{A} \cap B \end{aligned}$$

Donc, on a bien $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap B$.

2.

$$\begin{aligned} (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) &= (A \cup \overline{A}) \cap C \\ &= E \cap C \\ &= C \end{aligned}$$

Donc, on a $(A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) = C$.

Exercice 3

1. $P(0) = 1 \neq 0$. Donc 0 n'est pas solution de (E) .

2. Soit $\alpha \in \mathbb{E}^*$. On suppose que α est solution de (E) .

Calculons $P(\frac{1}{\alpha})$ (possible car $\alpha \neq 0$ donc $\frac{1}{\alpha}$ existe) :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\alpha^4} + \frac{2}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} + 1 \\ &= \frac{1 + 2\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4}{\alpha^4} \\ &= \frac{P(\alpha)}{\alpha^4} \\ &= 0 \text{ car } P(\alpha) = 0 \text{ puisque } \alpha \text{ est racine de } P. \end{aligned}$$

1

Donc $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E).

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $x \neq 0$ donc on peut factoriser par x^2 :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff x^2(x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0 \\ &\iff x^1 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ &\iff x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ car } x^2 \neq 0 \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En développant $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, on obtient $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (E') \iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Les trois réels à déterminer sont $a = 1, b = 2, c = -3$.

5. L'équation " $y^2 + 2y - 3 = 0$ " est une équation du second degré. On remarque que 1 est racine évidente. Puisque le produit des racines est -3 (d'après les coefficients du trinôme), on en déduit que l'autre racine est -3 .

Donc l'ensemble des solutions est $\{1, -3\}$.

6. (E') est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé quelconque. On pose $y = x + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 &\iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \\ &\iff y^2 + 2y - 3 = 0 \\ &\iff y = 1 \text{ ou } y = -3 \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\iff x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = -3 \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0(*) \text{ ou } x^2 + 3x + 1 = 0(**) \text{ (on a multiplié par } x \neq 0) \end{aligned}$$

(*) $x^2 - x + 1 = 0$ est une équation du second degré de discriminant $\Delta = -3 < 0$ donc elle n'a pas de racine réelle.

(**) $x^2 + 3x + 1 = 0$ est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$. Elle admet deux racines réelles : $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. Ainsi,

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

Ces deux nombres appartiennent à l'ensemble de définition de (E') (puisque'ils sont non-nuls). On en déduit

l'ensemble des solutions de (E') : $\left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, les équations (E) et (E') sont équivalentes. De plus 0 n'est pas solution de (E) . Donc (E) et (E') ont le même ensemble des solutions.

7. Notons $\alpha_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ les deux racines réelles de (E) .

Calculons : $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \times \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{(-3 - \sqrt{5})(-3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{(-3)^2 - 5}{4} = 1$.

Ainsi, $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}$ et $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2}$, ce qui est cohérent avec la question 2.

Exercice 4

1. On calcule les premiers termes de cette suite en utilisant la relation de récurrence et les deux premiers termes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ \quad \quad \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ \quad \quad \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ \quad \quad \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{array}}$$

2. (a) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés quelconque. On applique les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) + \cos(n\theta - \theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \\ &= 2 \cos n\theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos n\theta \cos \theta.}$$

- (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : 'T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)'$$

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies car $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ par définition de T_0 et T_1 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ soient vraies. Alors, d'après la relation de récurrence définissant la suite (T_n) ,

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

Or $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, donc $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - (\cos((n-1)\theta))$. D'après la question précédente, on a donc $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. D'après la question précédente :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n \\ T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1 \end{array}}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) = 0 &\iff \cos(5\theta) = \cos \frac{\pi}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 5\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\left\{ \frac{\pi(1+2k)}{10}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, qui est aussi :

$$\left\{ \frac{\pi}{10} + 2k\pi, \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, \frac{5\pi}{10} + 2k\pi, \frac{7\pi}{10} + 2k\pi, \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, \frac{11\pi}{10} + 2k\pi, \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, \frac{15\pi}{10} + 2k\pi, \frac{17\pi}{10} + 2k\pi, \frac{19\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (b) $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$. Donc, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\boxed{\cos \frac{\pi}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(car $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

- (c) La relation établie à la question 2b) donne pour $n = 5$: $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_5(\cos \theta) = \cos(5\theta)$. Donc, pour $\theta = \cos \frac{\pi}{10}$: $T_5(\cos \frac{\pi}{10}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

D'où (puisque nous connaissons T_5) : $16 \cos^5 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^3 \frac{\pi}{10} + 5 \cos \frac{\pi}{10} = 0$. Factorisons par $\cos \frac{\pi}{10}$:

$$\cos \frac{\pi}{10} (16 \cos^4 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^2 \frac{\pi}{10} + 5) = 0$$

Or nous avons vu que $\cos \frac{\pi}{10} \neq 0$. On en déduit : $16 \cos^4 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^2 \frac{\pi}{10} + 5 = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \cos \frac{\pi}{10} \text{ est une solution de l'équation } (E) : 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.}$$

- (d) On pose $y = x^2$ dans l'équation (E).

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ 16y^2 - 20y + 5 = 0 \text{ équation du 2d degré!} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \text{ ou } y = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \end{cases} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ &\quad \text{car } \frac{5+\sqrt{5}}{8} > 0 \text{ et } \frac{5-\sqrt{5}}{8} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right\}$$

- (e) Nous avons vu que (E) admet 4 solutions deux à deux distinctes : deux solutions strictement positives et leurs opposés. On a :

$$-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

De plus, $0 < 5 - \sqrt{5} < 6$ donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{6}{8}$. Donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{4}$. En appliquant la fonction $\sqrt{\cdot}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- (f) Nous savons que $\cos \frac{\pi}{10}$ est solution de (E) . Or nous avons explicité les solutions de (E) à la question 3d.

Donc $\cos \frac{\pi}{10}$ est l'une des quatre valeurs trouvées à la question 3d. Or $\cos \frac{\pi}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ et sur les quatre solutions obtenues au 3d, trois sont strictement inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, par élimination, la seule valeur possible de

$\cos \frac{\pi}{10}$ est la dernière :

$$\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$