

Exercice 1 Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1. $z = 1 + 2i - 2 - 4i$
2. $z = (1 + 2i)(2 - 4i)$
3. $z = (2 - 4i)^2$.
4. $z = (1 + 2i)^3$
5. $z = \frac{1 + 2i}{2 - 4i}$.
6. $z = \frac{1}{2i}$
7. $z = \sum_{k=1}^{2022} i^k$.

Correction

1. $z = 1 + 2i - 2 - 4i = -1 - 2i$
2. $z = (1 + 2i)(2 - 4i) = 10$
3. $z = (2 - 4i)^2 = 4 - 16i + (4i)^2 = -12 - 16i$.
4. $z = (1 + 2i)^3 = 1 + 3(2i)^2 + 3(2i) + (2i)^3 = 1 - 12 + 6i - 8i = -11 - 2i$.
5. $z = \frac{1 + 2i}{2 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{-6 + 8i}{20} = \frac{-3}{10} + i\frac{2}{5}$.
6. $z = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{4} = \frac{-i}{2}$
7. $i \neq 1$ donc $z = \sum_{k=1}^{2022} i^k = i \frac{1 - i^{2022}}{1 - i}$.
Or, $i^4 = 1$ donc $i^{2022} = (i^4)^{505} \cdot i^2 = -1$.
Donc, $\sum_{k=1}^{2022} i^k = \frac{2i}{1 - i} = \frac{2i(1 + i)}{2} = -1 + i$

Exercice 2 On note $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2 puis j^3 .
Correction $j^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$.
 $j^3 = j \cdot j^2 = j \cdot \bar{j} = |j|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.
2. Calculer $1 + j + j^2$.
Correction $1 + j + j^2 = 1 + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer j^n .
Correction Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ alors $j^n = (j^3)^k = 1$.
 - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ alors $j^n = (j^3)^k \cdot j = j$.
 - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$ alors $j^n = (j^3)^k \cdot j^2 = j^2$.
4. En déduire $\sum_{k=1}^{2021} j^k$.
Correction $j \neq 1$ donc $\sum_{k=1}^{2021} j^k = j^1 \cdot \frac{1 - j^{2021}}{1 - j} = j \frac{1 - j^2}{1 - j} = j + j^2 = -1$.

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z = \bar{z}$
2. $2z + 3\bar{z} = 1 - i$.
3. $2iz = 1 - z$
4. $2\bar{z} = 1 + 2i$.

Correction $\forall z \in \mathbb{C}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy$.

1. $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$
2. $2z + 3\bar{z} = 1 - i \Leftrightarrow 2x + 2iy + 3x - 3iy = 1 - i \Leftrightarrow 5x - iy = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{5} + i.$
3. $2iz = 1 - z \Leftrightarrow z(1 + 2i) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1 + 2i} \Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{5}.$
4. $2\bar{z} = 1 + 2i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1 + 2i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{2}.$

Exercice 4 Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes

1. $|z| = 2$
2. $|z| \leq 2.$
3. $2 < |z| \leq 5.$
4. $|z - 2| = 4$
5. $|z + 2i| \leq 1$

Correction

1. $|z| = 2 \Leftrightarrow z \in C(0, 2)$
2. $|z| \leq 2 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre 0 et de rayon 2 $D(0, 2).$
3. $2 \leq |z| \leq 5 \Leftrightarrow z \in D(0, 5) \setminus D(0, 2).$
4. $|z - 2| = 4 \Leftrightarrow z \in C(2, 4)$
5. $|z + 2i| \leq 1 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre $-2i$ et de rayon 1.

Exercice 5 Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $z = e^{i\pi}.$
3. $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
4. $z = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

Correction On rappelle que $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

1. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2i.$
2. $z = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1.$
3. $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 6e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 6e^{i\frac{\pi}{6}} = 6 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 3\sqrt{3} + 3i.$
4. $z = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3}{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}i.$

Exercice 6 Donner le module et un argument des complexes suivants puis la forme exponentielle.

1. $z = 4i$
2. $z = -2.$
3. $z = \sqrt{3} + i$
4. $z = 1 - \sqrt{3}i.$
5. $z = \frac{1}{1 - i}.$
6. $z = \frac{4i}{1 + i}$

Correction On commence par le module puis on reconnaît un angle associé au point d'affixe $\frac{z}{|z|}.$

1. $|4i| = 4$ et $\frac{4i}{|4i|} = \frac{4i}{4} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}.$
2. $|-2| = 2$ et $\frac{-2}{|-2|} = -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$ donc $-2 = 2e^{i\pi}.$

$$3. |\sqrt{3} + \mathbf{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \text{ et } \frac{\sqrt{3} + \mathbf{i}}{|\sqrt{3} + \mathbf{i}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ donc } \sqrt{3} + \mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}.$$

$$4. |1 - \sqrt{3}\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ et } \frac{1 - \sqrt{3}\mathbf{i}}{|1 - \sqrt{3}\mathbf{i}|} = \frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \text{ donc } 1 - \sqrt{3}\mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}.$$

$$5. \left| \frac{1}{1 - \mathbf{i}} \right| = \left| \frac{1 + \mathbf{i}}{2} \right| = \frac{|1 + \mathbf{i}|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \frac{\frac{1}{1 - \mathbf{i}}}{\left| \frac{1}{1 - \mathbf{i}} \right|} = \frac{1 + \mathbf{i}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1 + \mathbf{i}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 - \mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}.$$

$$6. \left| \frac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} \right| = \frac{|4\mathbf{i}|}{|1 + \mathbf{i}|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ et } \frac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} = \frac{4\mathbf{i}(1 - \mathbf{i})}{2} = 2\mathbf{i} + 2.$$

$$\text{Donc, } \frac{\frac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}}{\left| \frac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} \right|} = \frac{2\mathbf{i} + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ donc } \frac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 7 Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + \mathbf{i}\sqrt{3}$,

$z_2 = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - \mathbf{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

Correction

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$z_1 = 2\sqrt{3} \left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{6}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_3| = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + \sqrt{8}^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$z_3 = 4 \left(\frac{\sqrt{8}}{4} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{8}}{4} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) = 4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

2. En déduire une forme exponentielle de Z .

$$\text{Correction } Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6} = \frac{(2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{6}})^3 (4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}})^4}{(2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}})^6} = \frac{2^3 \cdot 3\sqrt{3} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{2}} 4^4 \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\pi}}{2^6 \cdot 2^3 \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{6\pi}{3}}} = 12\sqrt{3}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$$

3. Déterminer la forme algébrique de Z .

$$\text{Correction } Z = -12\sqrt{3}\mathbf{i}.$$

Exercice 8 Dans cet exercice, on note $w = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$.

1. Calculer w^5 .

$$\text{Correction } w^5 = \left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}} \right)^5 = 1.$$

2. Exprimer a et b en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Correction

$$a = w + w^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{i\pi} \left(e^{-\frac{3i\pi}{5}} + e^{\frac{3i\pi}{5}}\right) = -2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

La dernière égalité vient de $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

$$b = w^2 + w^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^3 = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{i\pi} \left(e^{-\frac{i\pi}{5}} + e^{\frac{i\pi}{5}}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

3. Exprimer $a + b + 1$ sous forme de somme et en déduire la valeur.

Correction

$$a + b + 1 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \sum_{k=0}^4 w^k = \frac{1 - w^5}{1 - w} = 0$$

4. En déduire $a + b$ et ab .

Correction $a + b = -1$.

$$ab = (w + w^4)(w^2 + w^3) = w^3 + w^4 + w^6 + w^7 = w^3 + w^4 + w^5 \cdot w + w^5 \cdot w^2 = w^3 + w^4 + w + w^2 = -1.$$

5. De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions ?

Correction a et b sont les deux solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

6. Résoudre cette équation.

Correction $\Delta = 1 - (-4) = 5$. Il y a donc deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
Une de ces solutions est a et l'autre est b .

7. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Correction L'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran donc $a = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et

$$b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16} = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

Puisque l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est un nombre positif donc on peut passer à la racine carrée.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 9 Linéariser ou exprimer sous forme de polynômes trigonométriques les expressions suivantes.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------|
| 1. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$ | 3. $\cos(4\theta)$ |
| 2. $\sin^3(3\theta)$ | 4. $\sin(5\theta)$ |

Correction

1. On applique les formules d'Euler pour le cosinus et le sinus

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} \right) \left(\frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} \right) \left(\frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \right) \\
 &= \frac{e^{4i\theta} + 2e^{2i\theta} + e^{2i\theta}e^{-2i\theta} - 2e^{2i\theta} - 4 - 2e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta}e^{2i\theta} + 2e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{-16} \\
 &= \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - 2}{-16} = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}
 \end{aligned}$$

On peut également retrouver ce résultat avec les formules de trigonométrie classiques.

On sait que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$ et $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

$$\text{donc } \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}.$$

2.

$$\begin{aligned}
 \sin^3(3\theta) &= \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{-8i} (e^{9i\theta} - 3e^{6i\theta}e^{-3i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-6i\theta} - e^{-9i\theta}) = \frac{1}{-8i} (e^{9i\theta} - 3e^{3i\theta} + 3e^{-3i\theta} - e^{-9i\theta}) \\
 &= \frac{1}{-8i} (e^{9i\theta} - e^{-9i\theta} - 3(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta})) = \frac{\sin(9\theta) - 3\sin(3\theta)}{-4} = \frac{3\sin(3\theta) - \sin(9\theta)}{4}
 \end{aligned}$$

3. Cette fois, on veut faire le travail dans l'autre sens et exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

Pour cela, on utilise l'autre lien entre $\cos(\theta)$ et $e^{i\theta}$: $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$.

$$\begin{aligned}
 \cos(4\theta) &= \operatorname{Re}(e^{4i\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^4) = \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4] \\
 (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \\
 \cos(4\theta) &= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \\
 &= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \sin^2(\theta))^2 \\
 &= 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1
 \end{aligned}$$

4. On fait pareil et on utilise encore le binôme de Newton pour développer la puissance 5.

$$\begin{aligned}
 \sin(5\theta) &= \operatorname{Im}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5] \\
 (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 &= \cos^5(\theta) + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\
 \sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
 &= 5(1 - \sin^2(\theta))^2\sin(\theta) - 10(1 - \sin^2(\theta))\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
 &= 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes

1. $z^2 - 4z + 4 = 0$
2. $z^2 = -4$
3. $2z^2 + 3z - 5 = 0$.

Correction

1. $z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$ donc l'équation admet une unique solution $z = 2$.
2. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$.
3. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées :
 $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4}$.

Exercice 11 [*] *Egalité du parallélogramme*

Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, |a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2} (|a - b|^2 + |a + b|^2)$.

Correction Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|a - b|^2 + |a + b|^2) &= \frac{1}{2} ((a - b)\overline{(a - b)} + (a + b)\overline{(a + b)}) = \frac{1}{2} ((a - b)(\bar{a} - \bar{b}) + (a + b)(\bar{a} + \bar{b})) \\ &= \frac{1}{2} (a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + \bar{b}b + a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + \bar{b}b) = \frac{1}{2} (2|a|^2 + 2|b|^2) = |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2 \cos a \sin b = \sin(a + b) + \sin(b - a)$$

Correction Soient a et b deux réels.

$$\sin(a - b) + 2 \cos a \sin b = \sin a \cos b - \sin b \cos a + 2 \cos a \sin b = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a + b)$$

2. Simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}.$$

(on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de θ)

Correction Si $e^{i\theta} = 1$, on a $S_n = n + 1$.

Sinon, d'après la formule de somme géométrique, $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

3. Déterminer la partie réelle de S_n .

Correction On factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2} (e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2})}{e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} \\ &= e^{in\theta/2} \cdot \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= e^{in\theta/2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(S_n) &= \operatorname{Re} \left(e^{in\theta/2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \operatorname{Re} \left(e^{in\theta/2} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \cos \left(\frac{n\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

On applique ensuite la question préliminaire avec $a = \frac{n\theta}{2}$ et $b = \frac{(n+1)\theta}{2}$ et on obtient

$$\operatorname{Re}(S_n) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

D'où, $\boxed{\operatorname{Re}(S_n) = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}}.$

4. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$.

Correction $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(S_n)$ donc si $e^{i\theta} = 1$, on a $\boxed{\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = n+1}.$

Sinon, $\boxed{\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}}.$