

Exercice 1 - Calculs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n 2^j \right) = \sum_{i=1}^n \left(2^i \cdot \frac{1 - 2^{n-i+1}}{1 - 2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2^i - 2^i \cdot 2^{n-i+1}}{-1} \right) = \sum_{i=1}^n (2^{n+1} - 2^i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2^{n+1} - \sum_{i=1}^n 2^i = n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = n \cdot 2^{n+1} + 2 - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j = 2 + (n-1)2^{n+1}}.$

2. (a) $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Donc, $\boxed{z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

(b) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Donc, $\boxed{z = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\sin^3(\theta) = \sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \cdot \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \cos(2\theta) \sin(\theta)}{2}$$

Or, $\sin(\theta) \cos(2\theta) = \frac{\sin(3\theta) + \sin(-\theta)}{2}$. Donc,

$$\sin^3(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \frac{\sin(3\theta) - \sin(\theta)}{2}}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{\sin(3\theta)}{4} + \frac{\sin(\theta)}{4}$$

Finalement, $\boxed{\sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}.$

(b) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On applique la formule précédente au réel $\frac{\theta}{3^k}$.

$$\begin{aligned} \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) &= \frac{1}{4} \left[3 \sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \sin\left(3 \frac{\theta}{3^k}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3 \sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right) \right] \\ \text{Donc, } \sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4} \left[3 \sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left[3^{k+1} \sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - 3^k \sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right) \right] \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique. Donc, $\boxed{\sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left[3^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3 \sin(\theta) \right]}.$

Exercice 2 - Etude de fonctions.

1. (a) $\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 1 - x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{1-x} > 0 \right\}.$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(1-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Pour la dernière équivalence, on utilise le fait qu'un polynôme de degré 2 est du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

Donc, $\mathcal{D} =]-1, 1[$.

- (b) La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $] -1, 1[$.
Par composée, la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
Soit $x \in] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-x+(x+1)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{1-x}} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{x+1} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Or, pour $x \in] -1, 1[, f'(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $] -1, 1[$.

Il reste à déterminer les limites. $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0^+$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1-x} = +\infty$.

Par composée, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{1-x} = 0$.

Par composée, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

Finalement, on obtient le tableau de variations suivant.

x	-1	1
$f'(x)$		
f		

+
-∞ ↗ +∞

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -g(x)$. Donc g est impaire. On en déduit que sa courbe représentative est invariante par symétrie centrale de centre O .
- (b) Puisque g est impaire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On obtiendra ensuite toute la courbe à partir du tracé sur $\mathbb{R}_+$, en effectuant une symétrie centrale de centre O .

g est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R}$.

$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Soit $x \in] -1, 1[$. $g'(x)$ est du signe de $1-x^2$. On en déduit le tableau de variation (sur $\mathbb{R}_+$) :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	
$g(x)$	0	1	0

↗ ↘

Précisions sur les valeurs et limites :

En 0 : $g(0) = 0$

En $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ par quotient des limites.

(c) On en déduit l'allure du graphe de g :

