

Devoir maison n°3

— Méthodes de calculs, Complexes et Applications. —

Exercice 1 - Calculs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j$.
2. Donner l'écriture trigonométrique des complexes suivants.
 - (a) $z = 2 - 2i$.
 - (b) $z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $\sin^3(\theta) = \frac{3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}$.
 - (b) En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right)$.

Exercice 2 – Sommes et complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Questions préliminaires.

- (a) Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2 \cos a \sin b = \sin(a + b) + \sin(b - a)$$

- (b) *(non faisable sans les complexes)* Simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}.$$

(on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de θ)

- (c) *(non faisable sans les complexes)* Déterminer la partie réelle de S_n .
- (d) *(non faisable sans les complexes)* En déduire

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

2. On suppose dans cette question que $e^{2ix} \neq 1$ ($x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$). On propose de calculer les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx).$$

- (a) Calculer $A_n + B_n$.

- (b) i. Montrer que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$.

- ii. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$.
- (c) En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n
3. On s'intéresse maintenant à la somme suivante $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.
- (a) Calculer $D_n(0)$.
- (b) On suppose dans cette question que $x \in]0; \pi[$.
En utilisant les questions préliminaires, montrer que $D_n(x) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- (c) Dans la suite, on considère le cas $n = 4$
- i. Déterminer les valeurs de $x \in [0, \pi]$ pour lesquelles $D_4(x) = 0$
- ii. Calculer $D_4\left(\frac{\pi}{2}\right), D_4\left(\frac{\pi}{4}\right), D_4\left(\frac{3\pi}{4}\right), D_4\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 3 - Etude de fonctions.

1. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$
- (a) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que g est impaire. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de g ?
- (c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- (d) Établir le tableau de variation de g . On justifiera précisément l'étude du signe de la dérivée et les calculs de limites.
- (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé. On prendra pour échelle 3cm pour 1 unité.
- (f) Déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R})$.
- (g) g est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
- (h) g est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
- (i) Déterminer en justifiant brièvement deux intervalles (pertinents) I et J tels que g soit bijective de I dans J .
2. On définit la fonction f par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.
- (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
- (b) Montrer que f définit une bijection de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer l'application réciproque f^{-1} .
- (c) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, exprimer $g \circ f^{-1}(y)$ à l'aide de f^{-1} , en fonction de y .
En déduire une expression simple de $f \circ g \circ f^{-1}$

Exercice 4 - Applications.

Soient E, F, G trois ensembles et soient des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- Justifier que l'application $g \circ f$ est bien définie.
- Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G et f surjective de E dans F , alors g est injective de F dans G .
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G et g injective de F dans G , alors f est surjective de E dans F .