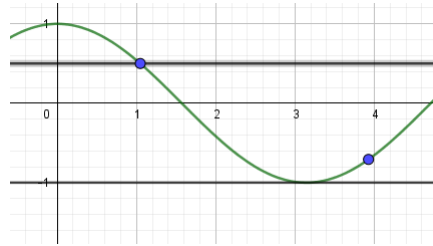


Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

1. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]\right)$.
2. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right]\right)$.
3. $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
4. $\ln([1, e] \cup [2e, +\infty[)$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)$.
6. $f([-5, 1])$ pour $f : x \mapsto x^2$.

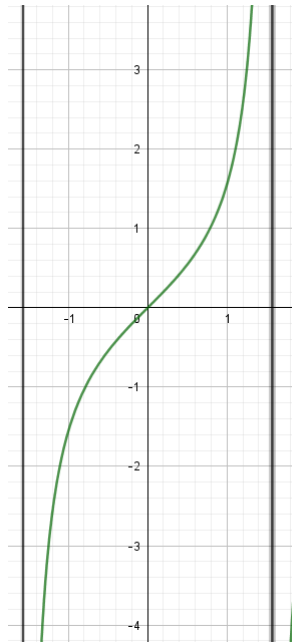
Correction

1. La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
2. Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



On en déduit que $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right]\right) = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

3. Le graphe de la fonction tangente est le suivant



La fonction tangente est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

On en déduit que $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \mathbb{R}$.

4. $\ln([1, e] \cup [2e, +\infty[) = [0, 1] \cup [\ln(2e), +\infty[$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*) =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
6. $f([-5, 1]) = ([0, 25])$.

Exercice 2

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.

- (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- (b) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$
- (c) $f(x) = |\sin(x)|$

2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions et la bijection réciproque lorsqu'elle existe.

Correction

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$.

- (b) La fonction f est définie sur $D_f = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ comme composée puis somme de fonctions dérivables et $\forall x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.
On en déduit que f est strictement croissante sur D_f . Donc, $f(D_f) = [-1, +\infty[$.

- (c) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Par composée avec la bon valeur absolue, $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

2. On peut étudier la bijectivité des deux premières fonctions à l'aide du théorème de la bijection.

- (a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 2]$ donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de $] -\infty, 2]$ dans $[-1, +\infty[$.
De même, elle est bijective de $[2, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.
Soit $y \in [-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4(1+y) \geq 0$ donc ce polynôme admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{1+y}}{2} = 2 - \sqrt{1+y} \text{ et } x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{1+y}}{2} = 2 + \sqrt{1+y}$$

On remarque que $x_1 \in] -\infty, 2]$ et $x_2 \in [2, +\infty[$.

On en déduit les deux bijections réciproques

$$f_g^{-1} : \begin{cases} [-1, +\infty[& \rightarrow &] -\infty, 2] \\ y & \mapsto & 2 - \sqrt{1+y} \end{cases} \text{ et } f_d^{-1} : \begin{cases} [-1, +\infty[& \rightarrow & [2, +\infty[\\ y & \mapsto & 2 + \sqrt{1+y} \end{cases}$$

- (b) La fonction f est continue et strictement croissante sur D_f donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de D_f dans $[-1, +\infty[$.
Soit $y \in [-1, +\infty[$.

$$\sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2} \geq \frac{-3}{2}$$

La solution appartient bien à D_f .

$$\text{On en déduit la bijection réciproque } f^{-1} : \begin{cases} [-1, +\infty[& \rightarrow & \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\\ y & \mapsto & \frac{(y+1)^2 - 3}{2} \end{cases}.$$

- (c) $f(0) = f(\pi)$ donc 0 admet au moins deux antécédents par la fonction f .
Donc, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x + 1}{x + 2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_h .
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$ et donner sa bijection réciproque.

Correction

1. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. On va étudier les variations de h .

La fonction h est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

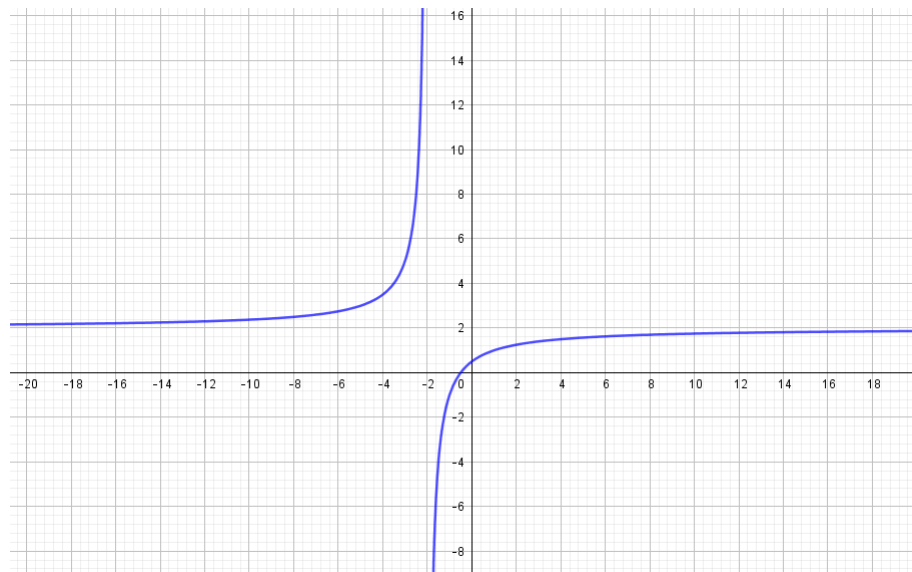
$$\forall x \in D_h, h'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

Donc, h est strictement croissante sur $] -\infty, -2[$ et sur $] -2, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$$

On en déduit que $h(D_h) =] -\infty, 2[\cup] 2, +\infty[$.



3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} = y &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x+2) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = 2y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{2-y} \end{aligned}$$

De plus, $\frac{2y-1}{2-y} = -2 \Leftrightarrow 2y-1 = -4+2y \Leftrightarrow 1 = -4$. Donc, $\frac{2y-1}{2-y} \neq -2$.

Donc, $\frac{2y-1}{2-y} \in D_h$.

L'équation admet une unique solution dans D_h donc h est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
La bijection réciproque est donnée par la résolution de l'équation précédente.

$$h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ y \mapsto \frac{2y-1}{2-y} \end{cases}$$

Exercice 4 On considère l'application g définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{|x-1|} + 4$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_g et $g(D_g)$.
2. L'application g est-elle injective sur D_g ?
3. Déterminer un intervalle sur lequel est l'est.

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \geq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}$.
2. Pour dériver g , on va donner son expression sans la valeur absolue.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

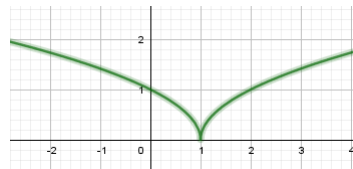
On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On étudie maintenant les limites aux bord pour en déduire $g(D_g)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$g(0) = 4 \text{ donc } g(D_g) = [4, +\infty[.$$

Le graphe de la fonction g est le suivant



3. $g(0) = g(2) = 4$ donc 0 admet deux antécédents par g .
On en déduit que g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
4. g est strictement monotone sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ donc g est injective sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Exercice 5

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
(a) $f(n) = 2n + 1$.

- (b) $f(z) = \bar{z}$
 (c) $f(\theta) = e^{i\theta}$

2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions.

Correction

1. $D_f = \mathbb{N}$ et $f(D_f) = 2\mathbb{N} + 1$.
 Soit $y \in 2\mathbb{N} + 1$.

$$2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{2}$$

donc l'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N} + 1$.

2. $D_f = \mathbb{C}$ et $f(D_f) = \mathbb{C}$.
 Soit $y \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = y \Leftrightarrow \bar{z} = y \Leftrightarrow z = \bar{y}$$

L'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\} = \mathcal{C}(0, 1) = \mathbb{U}$.

- (a) Injectivité? Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\theta) = f(\theta')$.
 donc, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi$
 Donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

- (b) Surjectivité? Soit $y = e^{i\phi} \in \mathbb{U}$.

$$e^{i\theta} = y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \phi + 2k\pi$$

L'équation admet plusieurs solutions donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

- (c) Elle n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Exercice 6

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z) \end{cases}$

- (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer les antécédents par f de (a, b, c) .
 (b) f est-elle bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y^2, z^2) \end{cases}$.

Déterminer deux ensembles E et F tels que

- (a) f soit surjectif de E dans F ,
 (b) f soit injectif de E dans F ,
 (c) f soit bijectif de E dans F .

Correction

1. (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (a, b, c) &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = x + y \\ c = x + y + z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b - a \\ z = c - a - b \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Chaque point de $\mathbb{C}^3$ a un unique antécédent donc f est bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y^2 = b \\ z^2 = c \end{cases}$$

(a) Si b et c sont négatifs, le système n'a pas de solution donc f est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(b) Si b et c sont positifs, le système a plusieurs solutions donc f est injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{b} \text{ ou } y = -\sqrt{b} \\ z = \sqrt{c} \text{ ou } z = -\sqrt{c} \end{cases}$$

Pour n'avoir qu'une solution, on va restreindre l'ensemble de départ.

La fonction f est bijective de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Exercice 7 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ x \mapsto \frac{1 + ix}{1 - ix} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Cette application est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$? surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$?

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - ix \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\left| \frac{1 + ix}{1 - ix} \right| = \frac{|1 + ix|}{|1 - ix|} = 1$ donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{U}$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1 + iy}{1 - iy} &\Leftrightarrow (1 + ix)(1 - iy) = (1 - ix)(1 + iy) \\ &\Leftrightarrow 1 + xy + i(x - y) = 1 + xy + i(-x + y) \\ &\Leftrightarrow x - y = -x + y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

donc la fonction f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Soit $z \in \mathbb{U}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + ix}{1 - ix} = z &\Leftrightarrow 1 + ix = z(1 - ix) \\ &\Leftrightarrow ix(1 + z) = z - 1 \end{aligned}$$

Donc, $z = -1$ n'a pas d'antécédent par f . Donc, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Exercice 8 [*] Soient E , F et G trois ensembles.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F .
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G .

Correction Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Supposons la fonction $g \circ f$ injective de E dans G .

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

Donc, $g[f(x)] = g[f(y)]$

Donc, $x = y$ (car $g \circ f$ est injective)

La fonction f est donc injective dans E dans F .

2. Supposons la fonction $g \circ f$ surjective de E dans G . On veut montrer que g est surjective de F dans G .

Soit $y \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G , $\exists x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = y$

que l'on peut réécrire $g[f(x)] = y$. Or, $f(x) \in F$.

On notant $z = f(x)$, on a bien : $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$.

La fonction g est surjective de E dans F .

Exercice 9 [*] Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Correction Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va montrer l'égalité des ensembles par double inclusion.

$\subseteq$: Soit $y \in f(A \cup B)$.

Donc, $\exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Donc, $(\exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in B \text{ tel que } y = f(x))$.

Donc, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.

Donc, $y \in f(A) \cup f(B)$.

On en déduit que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

$\supseteq$: $A \subset A \cup B$ donc $f(A) \subset f(A \cup B)$.

De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$.

On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a montré par double inclusion que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.