

Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

1. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]\right)$.
2. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right]\right)$.
3. $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
4. $\ln([1, \mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e}, +\infty[)$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)$.
6. $f([-5, 1])$ pour $f : x \mapsto x^2$.

Exercice 2

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
 - (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
 - (b) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$
 - (c) $f(x) = |\sin(x)|$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions et la bijection réciproque lorsqu'elle existe.

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_h .
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$ et donner sa bijection réciproque.

Exercice 4 On considère l'application g définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{|x-1|} + 4$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_g et $g(D_g)$.
2. L'application g est-elle injective sur D_g ?
3. Déterminer un intervalle sur lequel est l'est.

Exercice 5

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
 - (a) $f(n) = 2n + 1$.
 - (b) $f(z) = \bar{z}$
 - (c) $f(\theta) = \mathbf{e}^{i\theta}$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions.

Exercice 6

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, x+y, x+y+z) \end{cases}$
 - (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer les antécédents par f de (a, b, c) .
 - (b) f est-elle bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y^2, z^2) \end{cases}$.
Déterminer deux ensembles E et F tels que
 - (a) f soit surjectif de E dans F ,
 - (b) f soit injectif de E dans F ,
 - (c) f soit bijectif de E dans F .

Exercice 7 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ x \mapsto \frac{1+ix}{1-ix} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Cette application est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$? surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$?

Exercice 8 [*] Soient E , F et G trois ensembles.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F .
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G .

Exercice 9 [*] Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$