

Exercice 1 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$.

On pourra faire une conjecture ou utiliser la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.

Exercice 2 Déterminer le terme général des suites suivantes.

1. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.
3. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1, w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 Etudier la nature des suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n!}{n^n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{a}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5 Sans se soucier de la bonne définition de la suite, étudier la monotonie des suites proposées.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x$ en calculant la dérivée seconde de g .

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
3. On définit une suite auxiliaire $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
Montrer que cette suite est géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite t en fonction de n .
5. En déduire celui de la suite u .

Exercice 7 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1}$ en fonction de v_n . En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
4. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

6. Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n . On rappelle que la racine carrée est obtenue par la commande `sqrt`.
7. Écrire une fonction python `somme(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum_{k=0}^n u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Exercice 8 Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Soit $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 1}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f , c'est-à-dire que $\forall x \in [1, 2], f(x) \in [1, 2]$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.