



1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°3

Samedi 15 novembre 2025

– Produits, Complexes et Applications. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignées ou encadrés.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Deux écritures d'un complexe.

Soit $z = \frac{1}{1+i}$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $z_\theta = \frac{1}{1+e^{i\theta}}$.

1. Déterminer l'écriture algébrique et exponentielle de z .
2. Déterminer D , l'ensemble des réels θ pour lesquels z_θ est bien défini.
3. Soit $\theta \in D$. Déterminer l'écriture algébrique de z_θ .
4. (a) Donner l'écriture exponentielle de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$.
(b) En déduire celle de $z_{\frac{\pi}{5}}$.

Exercice 2 - Étude de fonction.

On considère la fonction cosinus hyperbolique, notée ch , définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que ch est paire.
(b) Justifier qu'il suffit d'étudier la fonction ch sur $\mathbb{R}_+$ pour connaître l'allure de sa courbe.
2. (a) Justifier que ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
(b) Étudier le signe de la dérivée de ch sur $\mathbb{R}_+$.
(c) Établir le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}_+$ (sens de variation, limites ou valeurs aux bornes de l'ensemble).
(d) Exprimer $\text{ch}(\ln(10))$ et $\text{ch}(\ln(20))$ sans utiliser la fonction exponentielle.
(e) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé. **On la tracera sur le document en annexe.**
La question précédente permet de tracer quelques points.
Données : $\ln(10) \simeq 2,3$ et $\ln(20) \simeq 3,0$.
3. (a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$ précédemment tracée, déterminer sans justifier les ensembles :

$$\text{ch}(\mathbb{R}), \text{ch}(\mathbb{R}_+), \text{ch}(\mathbb{R}_+^*), \text{ch}([-\ln(10), \ln(20)])$$

(b) $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective? surjective?

4. On pose $f \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow [1, +\infty[\\ x & \mapsto \text{ch}(x) \end{array} \right.$

- (a) Soit $y \in [1, +\infty[$. Montrer que $y^2 - 1 \geq 0$ et que $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$
- (b) Montrer que $(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1}) = 1$ et que $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$.
- (c) En déduire que $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$.
- (d) Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque. On pourra utiliser les résultats précédents.

Tournez s'il vous plait.

Exercice 3 - Coefficients binomiaux et polynômes.

On rappelle que pour tout entier naturel n et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On rappelle la relation de Pascal : pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel x , on considère le produit suivant :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1. **Informatique.** Les questions suivantes sont indépendantes. On rappelle que la commande `for i in range(a,b)` exécute les instructions de la boucle pour les valeurs de i comprises entre **a inclus** et **b exclu**.

(a) Expliquer ce que renvoie la fonction suivante quand on tape dans le shell : `mystere(5)` :

```
1 def mystere(n):  
2     a = 1  
3     for i in range(1, n+1):  
4         a = a * i  
5     return a
```

(b) Écrire une fonction produit(n, x) qui prend en entrée un entier naturel n non nul ainsi qu'un réel x , et qui renvoie $P_n(x)$.

2. **Valeurs particulières.** Soit n un entier naturel non nul.

- (a) calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(-n)$.
(b) Déterminer les racines de P_n (c'est à dire les solutions de l'équation $P_n(x) = 0$).
(c) Soit un entier naturel p . Exprimer $\prod_{k=1}^n (k+p)$ à l'aide de factorielles.
(d) En déduire que $P_n(p) = \binom{n+p}{p}$.

3. **Une autre expression de** $\prod_{k=1}^n (n+k)$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n)! = 2^n \cdot n! \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1)$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les questions 2c et 3a, déterminer une autre expression de $\prod_{k=1}^n (n+k)$.

4. Soit n un entier naturel fixé.

$$\text{Montrer que pour tout entier naturel } N, \sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N}.$$

On pourra faire une démonstration par récurrence sur N et utiliser la question 2d.

Exercice 4 - Sommes de complexes de module 1.

On considère le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

1. Donner l'écriture exponentielle de z et en déduire z^7 .
2. On pose

$$S = z + z^2 + z^4 \text{ et } T = z^3 + z^5 + z^6.$$

- (a) Calculer la somme $S + T$.
Indication : pensez aux suites géométriques.
(b) Calculer le produit ST .
(c) Montrer que S et T sont les deux solutions de l'équation $Z^2 + Z + 2 = 0$.
En déduire les valeurs possibles pour S et T .

3. (a) En revenant à la définition de S , exprimer sa partie imaginaire à l'aide des sinus des angles $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, et $\frac{8\pi}{7}$.
(b) En déduire une expression de $\text{Im}(S)$ à l'aide des sinus d'angles compris entre 0 et π .
(c) Montrer que la partie imaginaire de S est positive.
4. En déduire la valeur de S puis celle de T .