

Exercice 1 - Deux écritures d'un complexe.

1. $z = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$ donc $\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}}$.

$$|z| = \left| \frac{1-i}{1+i} \right| = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$z = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{ donc } \boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}.$$

2. $D = \{\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \neq -1\} = \{\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq \pi + 2k\pi\}$ donc $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

3. Soit $\theta \in D$.

$$\begin{aligned} z_\theta &= \frac{1}{1+e^{i\theta}} = \frac{1+e^{-i\theta}}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} = \frac{1+e^{-i\theta}}{|1+e^{i\theta}|^2} = \frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{|1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)|^2} \\ &= \frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2} = \frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{2+2\cos(\theta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{2+2\cos(\theta)} = \frac{1}{2}} \text{ et } \boxed{\operatorname{Im}(z_\theta) = \frac{-\sin(\theta)}{2+2\cos(\theta)}}$$

4. (a)

$$1+e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{10}} (e^{-i\frac{\pi}{10}} + e^{i\frac{\pi}{10}}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}$$

On a donc $\boxed{\left|z_{\frac{\pi}{5}}\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ et $\boxed{\frac{\pi}{10} \text{ est un argument de } z_{\frac{\pi}{5}}}$.

(b) Par passage à l'inverse, on en déduit l'écriture exponentielle de $z_{\frac{\pi}{5}}$.

$$\boxed{z_{\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} e^{-i\frac{\pi}{10}}}.$$

Exercice 2 - Étude de fonction.

1. (a) ch est définie sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$.

$\boxed{\text{Donc la fonction } \operatorname{ch} \text{ est paire}}.$

(b) La fonction ch est paire, donc la courbe $\mathcal{C}$ est invariante par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit d'étudier la fonction sur $\mathbb{R}_+$ et de tracer la courbe sur $\mathbb{R}_+$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir toute la courbe.

2. (a) ch est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ et $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$).

$\boxed{\text{Donc } \operatorname{ch} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}.$

(b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{ch}'(x) > 0 &\iff e^x - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^{-x} < e^x \\ &\iff -x < x \text{ car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \\ \operatorname{ch}'(x) = 0 &\iff x = 0 \end{aligned}$$

- (c) D'après la question précédente, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (puisque sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points).

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = +\infty$ par somme des limites, et $ch(0) = 1$.

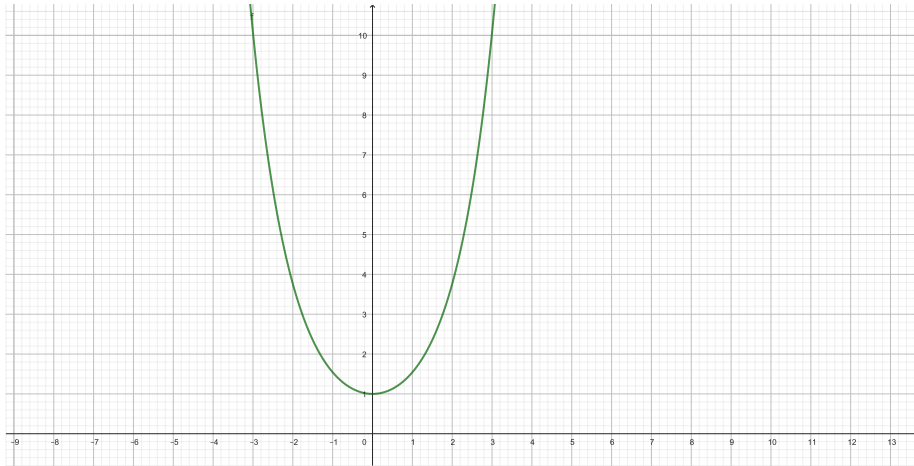
On en déduit le tableau de variation de ch :

x	0	$+\infty$
$ch'(x)$	0	+
ch	1	$+\infty$

$$(d) \quad ch(\ln(10)) = \frac{e^{\ln(10)} + e^{-\ln(10)}}{2} = \frac{10 + 0.1}{2} = 5,05.$$

$$ch(\ln(20)) = \frac{e^{\ln(20)} + e^{-\ln(20)}}{2} = \frac{20 + 1/20}{2} = 10,025.$$

- (e) On en déduit l'allure de la courbe représentative de ch :



3. (a) On déduit de l'étude précédente :

$$ch(\mathbb{R}) = [1, +\infty[, \quad ch(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[, \quad ch(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[, \quad ch([- \ln(10), \ln(20)]) = [1; 10,025].$$

- (b) Puisque ch est paire, en particulier $ch(-1) = ch(1)$.

Ainsi, 1 et $-1 \in \mathbb{R}$ (ensemble de départ), $1 \neq -1$ et $ch(1) = ch(-1)$. Donc ch n'est pas injective.

De plus, nous avons vu dans l'étude précédente que $ch(\mathbb{R}) = [1, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}$. Donc ch n'est pas surjective.

4. (a) $y \geq 1$ donc $y^2 \geq 1$ (on a appliqué la fonction $t \mapsto t^2$, croissante sur $\mathbb{R}_+$). Donc $y^2 - 1 \geq 0$.

De plus, $y^2 > y^2 - 1 \geq 0$. On applique la fonction $\sqrt{\cdot}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où $|y| > \sqrt{y^2 - 1} \geq 0$. Or $y \geq 0$ donc $|y| = y$.

Ainsi, $y > \sqrt{y^2 - 1}$, d'où $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$.

- (b) On développe (identité remarquable) : $(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1}) = y^2 - (\sqrt{y^2 - 1})^2 = y^2 - (y^2 - 1) = 1$.

$$\text{Donc } (y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1}) = 1.$$

De plus, $\sqrt{y^2 - 1} \geq 0$ et $y \geq 1$, donc $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$.

- (c) On a déjà montré que $0 < y - \sqrt{y^2 - 1}$.

De plus, à la question précédente, on a montré que $(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1}) = 1$, donc $y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$. Or $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$. On en déduit que $\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \leq 1$. Ainsi, $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$.

- (d) Soit $y_0 \in [1, +\infty[$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$: " $f(x) = y_0$ ".

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y_0 \\ &\iff e^{2x} + 1 = 2y_0 e^x \quad (\text{on a multiplié par } 2e^x \neq 0) \\ &\iff (e^x)^2 - 2y_0 e^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = e^x$. On obtient :

$$f(x) = y_0 \iff X^2 - 2y_0X + 1 = 0 \quad (E')$$

(E') est une équation du second degré en X , de discriminant $\Delta = 4y_0^2 - 4 = 4(y_0^2 - 1)$. Or $y_0 \in [1, +\infty[$ donc d'après les questions précédentes, $y_0^2 - 1 \geq 0$. Ainsi, $\Delta \geq 0$. Donc l'équation (E') a pour racines $\frac{2y_0 - \sqrt{4(y_0^2 - 1)}}{2}$ et $\frac{2y_0 + \sqrt{4(y_0^2 - 1)}}{2}$. On peut simplifier ces fractions. On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 &\iff X = y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1} \text{ ou } X = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1} \\ &\iff e^x = \underbrace{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1}}_{>0} \text{ ou } e^x = \underbrace{y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1}}_{>0} \\ &\iff x = \underbrace{\ln(y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1})}_{\leq 0} \text{ ou } x = \underbrace{\ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1})}_{\geq 0} \\ &\iff x = \ln(y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1}) \text{ qui appartient à } \mathbb{R}_+ \text{ car } y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1} \geq 1 \end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution. Donc y_0 admet un unique antécédent par f , qui est $\ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1})$. Ceci est vrai pour y_0 appartenant à $[1, +\infty[$ quelconque, donc c'est vrai pour tout y_0 appartenant à $[1, +\infty[$.

Donc f est bijective, et son application réciproque est $f^{-1} : \begin{matrix} [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{matrix}$

Exercice 3 - Coefficients binômiaux et polynômes.

1. Informatique.

(a) Pour tout entier naturel n , `mystere(n)` renvoie $n!$. En particulier `mystere(5)` renvoie 5!.

(b)

```
1 def produit(n, x):
2     p = 1
3     for k in range(1, n+1):
4         p = p * (1 + x / k)
5     return p
```

2. Valeurs particulières.

(a) $P_n(0) = 1$ car tous les facteurs valent 1 dans le produit.

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1. \text{ Donc } P_n(1) = n+1$$

$$P_n(-1) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{-1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{k}\right) = 0 \text{ car le premier facteur est nul. Donc } P_n(-1) = 0$$

$$P_n(-n) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{-n}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k-n}{k}\right) = 0 \text{ car le dernier facteur est nul. Donc } P_n(-n) = 0$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P_n(x) = 0 &\iff \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = 0 \\ &\iff \prod_{k=1}^n \left(\frac{x+k}{k}\right) = 0 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } x+k=0 \\ &\iff x \in \llbracket -n, -1 \rrbracket \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des racines de P_n est $\llbracket -n, -1 \rrbracket$ (P_n admet n racines deux à deux distinctes).

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\prod_{k=1}^n (k+p) = (p+1)(p+2)\dots(p+n) = \frac{1 \times 2 \times \dots \times p \times (p+1) \dots (p+n)}{1 \times 2 \times \dots \times p}. \text{ Donc } \prod_{k=1}^n (k+p) = \frac{(n+p)!}{p!}.$$

Or on remarque que $P_n(p) = \prod_{k=1}^n \frac{k+p}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+p)}{\prod_{k=1}^n k}$. Le dénominateur vaut $n!$. D'où $P_n(p) = \frac{(n+p)!}{p!n!}$.

Ainsi,
$$P_n(p) = \binom{n+p}{p}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$(2n)! = \prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^n (2k-1)$ (on dissocie le produit des nombres pairs et celui des impairs).

Donc $(2n)! = 2^n \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n (2k-1) = 2^n \cdot n! \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1).$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. D'après la question 2c (en posant $n = p$), $\prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{(n+n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{n!}.$

Donc, $\prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{2^n n! \prod_{k=1}^n (2k-1)}{n!} = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$

Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

4. Soit n un entier naturel fixé.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{Q}_N : " \sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N} "$$

• **Initialisation :**

$\sum_{k=0}^0 P_n(k) = P_n(0) = 1$ et $\binom{n+0+1}{0} = 1$ donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_N$ soit vraie.

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N+1} P_n(k) &= \left(\sum_{k=0}^N P_n(k) \right) + P_n(N+1) \\ &= \binom{n+N+1}{N} + \binom{n+N+1}{N+1} \text{ d'après } \mathcal{Q}_N \text{ et 2c} \\ &= \binom{n+N+2}{N+1} \text{ d'après ??, car } 0 \leq N \leq (n+N+1) - 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}_{N+1}$ est vraie.

• **Conclusion :**

Ainsi, d'après le principe de récurrence,
$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N}.$$

Exercice 4 - Sommes de complexes de module 1.

1. On peut noter $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{2i\pi}$ donc $z^7 = 1$.

2. (a) $S + T = z + z^2 + z^4 + z^3 + z^5 + z^6 = \sum_{k=1}^6 z^k.$

Or, $z \neq 1$ donc $S + T = z \frac{1-z^6}{1-z} = \frac{z-z^7}{1-z} = \frac{z-1}{1-z}$ donc $S + T = -1$.

(b) $ST = (z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6) = z^4+z^5+z^7+z^6+z^7+z^9+z^7+z^8+z^{10} = z^4+z^5+1+z^6+1+z^2+1+z+z^3 = 3 + S + T.$

Donc, $ST = 2$.

(c) Les complexes S et T sont les racines de l'équation $(z-S)(z-T) = 0$.

Or, $(z-S)(z-T) = z^2 - (S+T)z + ST$ donc S et T sont les solutions de $z^2 + z + 2 = 0$.

Il s'agit d'une équation de degré 2 pour laquelle $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.

Donc l'équation a deux racines complexes $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$

On ne sait pas quelle est celle qui est S ou celle qui est T .

3. (a) $\text{Im}(S) = \text{Im}(z + z^2 + z^4)$ donc $\boxed{\text{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}$.

(b) $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{8\pi}{7} - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Donc $\boxed{\text{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}$.

(c) On a $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \geq 0$.

De plus, par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leq \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

Donc $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$.

Par somme, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$ donc $\boxed{\text{Im}(S) \geq 0}$.

4. On peut alors identifier S et T avec les deux solutions z_1 et z_2 .

$$\boxed{S = \frac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - \mathbf{i}\sqrt{7}}{2}}.$$