Chapitre 10 : Dénombrement

Table des matières

1 Définitions.

1.1 Ensemble fini.

Définition 1.

Soit E un ensemble.
On dit que E est un ensemble fini lorsqu'il contient un nombre fini d'éléments.
On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E.
On note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Exemple 2.

1. $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal nul.
2. $[\![1, 12]\!]$ est un ensemble fini de cardinal 12.

1.2 Ensemble infini.

Définition 3.

Soit E un ensemble.
On dit que E est un ensemble infini lorsqu'il n'est pas fini.

Exemple 4. L'ensemble des nombres premiers est infini.

2 Dénombrement.

2.1 Listes avec répétition.

Définition 5.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on appelle $p-$liste ou $p-$uplet de E un élément de E^p.

Exemple 6. Pour $E = \{0, 2, 3, 12\}$, $(3, 2, 3)$ est un $3-$uplet de E.

Remarque 7. On rencontre des $p-$uplet lors de tirages **avec remise**.

Théorème 8.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in \mathbb{N}$, il y a exactement n^p $p-$uplets de E.

Exemple 9. Combien de nombres à 8 chiffres peut-on écrire ne contenant que des 1 et des 2 ?

2.2 Listes sans répétition.

Définition 10.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, on appelle $p-$liste sans répétition une $p-$liste dont les éléments sont **distincts**.

Exemple 11. $(1, 2, 5)$ est une $3-$liste sans répétition de $[\![1; 12]\!]$.

Remarque 12. On rencontre des $p-$listes sans répétition lors de tirages **sans remise**.

Théorème 13.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$ $p-$listes sans répétition de E.

Exemple 14. On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 3 cartes successivement et sans remise.
Combien y a-t-il de tirages possibles ? (L'ordre compte).

2.3 Permutations.

Définition 15.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle permutation de E un $n-$uplet de E contenant exactement une seule fois chaque élément de E.

Exemple 16. $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$ est une permutation de $[\![1; 12]\!]$.

Remarque 17. On rencontre des permutations lorsqu'on veut **trier les éléments** d'un ensemble.

Théorème 18.

Soit E un ensemble de cardinal n.
Il y a exactement $n!$ permutations de E.

Exemple 19. Lors d'une compétition entre 8 sportives, combien y a-t-il de classements possibles ?

Exemple 20. Combien y a -t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

2.4 Combinaisons.

Définition 21.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, on appelle $p-$combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Exemple 22. On rencontre des $p-$combinaisons lors de **tirages simultanés**.

Théorème 23.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, il y a exactement $\dbinom{n}{p}$ $p-$combinaisons de E.

Exemple 24. De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

2.5 Nombre de sous-parties d'un ensemble.

Théorème 25.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Exemple 26. Si E est l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 12, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

3 Propriété du cardinal d'un ensemble.

3.1 Egalité des cardinaux.

Théorème 27.

Soient E et F deux ensembles finis.
E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre les deux ensembles.

Exemple 28. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. $[\![m, n]\!]$ est un ensemble fini de cardinal $n - m + 1$.

3.2 Cardinal d'une partie de E.

Théorème 29.

Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E ($A \in \mathcal{P}(E)$).

1. A est un ensemble fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
2. $\text{card}(A) = \text{card}(E) \Leftrightarrow A = E$.

Remarque 30. Le calcul du cardinal peut donc remplacer la démonstration de la double inclusion.

3.3 Cardinal d'une intersection ou d'une union.

Théorème 31.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties de E.
Alors, $A \cap B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cap B) \leq \min(\text{card}(A),\text{card}(B)).$$

Théorème 32.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties **disjointes** de E.
Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Théorème 33.

Soit E un ensemble fini. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors, $\overline{A}$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Théorème 34 (Formule du Crible)**.**

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Exemple 35. Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
Que pouvez-vous dire de $\text{card}(A \cup B \cup C)$?

3.4 Cardinal d'un produit cartésien.

Théorème 36.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

Théorème 37.

Soit E un ensemble fini. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors, E^p est un ensemble fini et

$$\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p .$$

4 A retenir.

4.1 Bien cerner la situation.

	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre	**Listes avec répétition** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^*$ n^p	**Listes sans répétition** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \leq n$ $\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Sans ordre		**Combinaisons** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \leq n$ $\dbinom{n}{p}$

4.2 Additionner ou multiplier des cardinaux ?

Pour déterminer un cardinal,

- Si l'ensemble que vous étudiez est une union disjointe de plusieurs ensembles,
  Alors, **vous additionnez** les cardinaux de chaque ensemble.

- Si l'ensemble que vous étudiez est un produit cartésien de plusieurs ensembles,
  Alors, **vous multipliez** les cardinaux de chaque ensemble.

5 Vision combinatoire des coefficients binomiaux (HP).

5.1 Symétrie des coefficients.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble à n éléments.
Soit $p \in [\![1; n]\!]$.
Choisir une partie de E à p éléments, c'est équivalent à choisir les $n - p$ éléments qui ne sont pas dans cette partie.
Donc, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

5.2 Version combinatoire du triangle de Pascal.

Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments. Soit $x \in E$. Soit $p \in [\![1; n]\!]$.
Parmi les $\binom{n+1}{p}$ parties de E à p éléments, il y a

- celles contenant x, il y en a $\binom{n}{p-1}$
- celles ne contenant pas x, il y en a $\binom{n}{p}$.

D'où $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

5.3 Version combinatoire du binôme de Newton.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
Par définition : $(a + b)^n = (a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)$.
Développer $(a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)$, c'est choisir un terme (a ou b) dans chaque parenthèse et les multiplier.
On obtient des produits de n termes qui sont tous des a ou des b.
Pour un $k \in [\![0; n]\!]$, le nombre de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ est égal au nombre de produits avec k facteurs a et $n - k$ facteurs b.
Il y en a autant que de façons de choisir k parenthèses parmi les n possibles, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.
Pour chaque $k \in [\![0; n]\!]$, on a donc $\binom{n}{k}$ termes égaux à $a^k b^{n-k}$.
Finalement, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.