Exercice 1 Une urne contient 20 boules.
Combien y a-t-il de tirages possibles dans chacune des situations suivantes ?

1. On tire 5 boules simultanément.
2. On tire 4 boules successivement avec remise.
3. On tire 7 boules successivement sans remise.

Correction

1. On compte 5−combinaisons de l'urne donc il y en a $\binom{20}{5} = 15504$.
2. On compte des 4−listes donc il y en a $20^4 = 160000$.
3. On compte des 7−listes sans répétition donc il y en a $\dfrac{20!}{13!} = 21705600$.

Exercice 2 Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Combien peut-on former de mots de p lettres (ayant un sens ou non) avec un alphabet de 26 lettres ?
2. Même question pour des mots ne comportant que des lettres distinctes.
3. Un palindrome est un mot qui se lit de manière identique que ce soit de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche (exemples : kayak, rever, ressasser). Combien peut-on former de palindromes de 9 lettres (ayant un sens ou non) avec un alphabet de 26 lettres ?
4. Combien peut-on former de palindrome de $2p$ lettres ?

Correction

1. Il y en a 26^p.
2. On a 26 choix pour la première lettre, 25 choix pour la seconde, ..., jusqu'à $26 - (p - 1)$ choix pour la p−ème. Donc il y en a $\dfrac{26!}{(26-p)!}$.
3. le palindrome est totalement défini par ses 5 premières lettres donc il y a 26^5 palindromes de longueur 9.
4. Le palindrome est totalement défini par ses p premières lettres donc il y a 26^p palindromes de longueur $2p$.

Exercice 3
Une course de chevaux comporte 20 partants. Quel est le nombre de résultats possibles de tiercés :

1. Dans l'ordre ?
2. Dans le désordre ?

Correction

1. On cherche à fabriquer des 3−listes sans répétition de $[\![1;20]\!]$. Il y a donc $\dfrac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.
2. On cherche à fabriquer des 3−combinaisons de $[\![1;20]\!]$. Il y a donc $\dfrac{20!}{3!.17!} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$.

Exercice 4

1. Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot ORANGE ?
   (exemple : rongea est un anagramme de orange)
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANANAS ?

3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CONCOURS ?

Correction

1. Un anagramme correspond à une permutation de {O,R,A,N,G,E} donc il y en a $6! = 720$.
2. Pour les anagrammes du mot ANANAS,
   - on choisit les positions des trois A : $\binom{6}{3} = 20$ choix possibles.
   - on choisit les positions des deux N parmi les 3 places restantes : $\binom{3}{2} = 3$ choix possibles.
   - on place le S à la place restante.

   Il y a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes du mot ANANAS.
3. Pour les anagrammes du mot CONCOURS,
   - on choisit les positions des deux C : $\binom{8}{2} = 28$ choix possibles.
   - on choisit les positions des deux O parmi les 6 places restantes : $\binom{6}{2} = 15$ choix possibles.
   - on place les 4 lettres restantes sur les places restantes donc on compte des permutations de $\{N, U, R, S\}$. Il y en a $4! = 24$.

   Il y a donc $28 \times 15 \times 24 = 10080$ anagrammes du mot CONCOURS.

Correction

Exercice 5 L'alphabet comporte 6 voyelles et 20 consonnes.

1. Combien y a-t-il de mots de 6 lettres commençant par une voyelle ?
2. Combien peut-on écrire de mots distincts contenant 3 voyelles et 5 consonnes ?

Correction

1. On choisit la voyelle qui débute le mot puis on choisit le mot de 5 lettres pour compléter.
   Il y a donc $6 \times 20^5 = 19200000$ mots possibles.
2. Pour construire un tel mot,
   (a) On choisit les 3 voyelles parmi les 6 : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.
   (b) On choisit les 5 consonnes parmi les 20 : $\binom{20}{5} = 15504$ possibilités

   On fait ensuite des permutations de ces 8 lettres pour voir tous les mots : $8!$ possibilités.
   Il y a donc $20 \times 15504 \times 8! = 9376819200$ mots.

Exercice 6 Combien y a-t-il de nombres à 5 chiffres (on ne met pas de 0 en premier)

1. au total ?
2. Où 0 n'apparait pas ?
3. Où 0 apparait exactement 1 fois ?
4. Où 0 apparait au moins une fois ?
5. Où 0 apparait au plus une fois ?

Correction

1. Il y en a $9 \times 10^4 = 90000$.

2. Il y en a $9^5 = 59049$.
3. On place le 0 puis on choisit les 4 autres chiffres donc il y en a $4 \times 9^4 = 32805$.
4. On compte plutôt ceux où 0 n'apparait pas puis on les retranche au nombre total de mot. On trouve $90000 - 9^5 = 30951$ nombres possibles.
5. On compte les mots où il n'apparait pas et les mots où il apparait exactement une fois. On trouve $9^5 + 4 \times 9^4 = 85293$.

Exercice 7 [*]
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Correction
En appliquant la formule qui nous a servi à déterminer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, le cardinal de l'ensemble des parties de E ayant un nombre pair d'éléments est P$= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et le cardinal de l'ensemble des parties de E ayant un nombre impair d'éléments est $I = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

On a $P + I = 2^n$ et

$$P - I = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1 + (-1))^n = 0$$

Donc, $P = I$ et $P = I = 2^{n-1}$.
Donc, E possède 2^{n-1} parties de cardinal pair et donc autant de parties de cardinal impair.